No. II.

Under the patronage of the Government of Bengal, and dedicated, by permission, to the Governor General of India.

ENCYCLOPÆDIA BENGALENSIS,

Or a series of publications in English and Bengali,

COMPILED FROM VARIOUS SOURCES,

ON HISTORY, SCIENCE, AND LITERATURE,

EDITED

BY THE REV. K. M. BANERJEA.

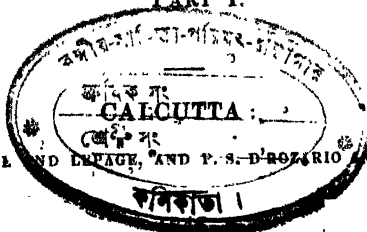
" ψυχης ιατρειον"

Diod. Sic. I 49.

Mathematics.

GEOMETRY.

PART I.

CALCUTTA:

OSTELL AND LEPAGE, AND P. S. D'ROZARIO AND CO.

ELEMENTS

OF

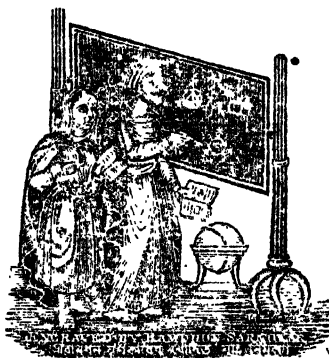
GEOMETRY.

THE FIRST THREE BOOKS OF EUCLID.

BY JOHN PLAYFAIR, F. R. S.

WITH ADDITIONS

BY WILLIAM WALLACE, A. M. F. R. S. E.

AND A SYMBOLICAL DEMONSTRATION TO EACH PROPOSITION.

LILAVATI CATECHIZED ON MATHEMATICS.

TO WHICH IS PREFIXED AN EXTRACT FROM LORD BROUGHAM'S ESSAY ON THE OBJECTS, &C. OF SCIENCE, AND A SHORT COMPENDIUM OF ALGEBRAIC RULES FROM WHEWELL'S MECHANICAL EUCLID.

CALCUTTA:

OSTELL AND LEPAGE, AND P. S. D'ROZARIO AND CO.

1846.

বিদ্যাকল্পদ্রুম

অর্থাৎ বিবিধ বিদ্যাবিষয়ক রচনা।

শ্রী কৃষ্ণমোহন বন্দ্যোপাধ্যায়

দ্বারা সংগৃহীত।

দ্বিতীয় কাণ্ড।

ক্ষেত্র তত্ত্ব

১ খণ্ড

ইউক্লিডের প্রথম তিন অধ্যায়।
জান প্লেফেয়রের ব্যাখ্যানুসারে
ও উলিঅম ওয়ালেসের অতিরিক্ত লিখনানুসারে
অনুবাদিত।

কলিকাতা লালদীঘির নিকট রোজারিও সাহেবের
যন্ত্রালয়ে মুদ্রাঙ্কিত হইল।
ইং ১৮৪৬ শক ১৭৬৮

TO THE HON'BLE C. H. CAMERON,

President of the Council of Education.

HON'BLE SIR,

The criticisms which have appeared in the Newspapers on the first Number of the Encyclopædia Bengalensis, present a few questions for consideration, on which I beg leave to solicit your advice and direction. It is your known interest in the cause which the Encyclopædia is intended to subserve that emboldens me thus to presume upon your kindness and trespass upon your time. I need not here repeat how anxious I feel to conduct the Encyclopædia as efficiently as circumstances will possibly allow; and I am the more solicitous for the favour of your opinion inasmuch as it must, on the one hand, rectify whatever may have been amiss in the execution of my plan, and be calculated to remove, on the other hand, whatever misapprehensions may have existed in any quarter.

The questions that have arisen are first, with reference to the general plan of the undertaking; second, with reference to the mode of conducting it.

1st.—In order to produce a series of works adapted to the present state of the Hindu mind, and with the special object of drawing the attention of the Native community to the history and science of Europe, my proposal has been, as you are aware, to draw as largely and as freely, as may appear requisite, from all sources that may be deemed suitable,—only consistently with the acknowledged rules of literary courtesy, and with justice to the authors whose works may be handled. I set out with the History of Rome, partly because it was the history of a nation from whom

[illegible] of European civilization were more immediately [illegible]ed, partly because this history was entirely unknown to vernacular readers. I adopted Eutropius as my text, because it was a good compendium of this history, as authentic as any school-book now in use, and capable of being dilated or contracted at pleasure without injustice to the author, who has not inserted in his narrative anything that might be called *characteristic* of himself. If I introduced additional matter from other sources, it was to render the history the more interesting; and by proclaiming this act in the title page, I thought I guarded sufficiently against any mistake on the part of the reader, who might easily conclude from thence that my object was to represent the *history* and not the *historian*. To represent the *historian*, i. e. to exhibit the mode in which a writer constructs his narrative, might be premature so far as Bengali readers are concerned. Where the history is already known, the reader may dwell with great interest on the peculiar modes in which certain master minds have delivered it; but where the history itself is unknown, such philosophical discrimination could hardly be expected. When a new story is related to us, we desire first of all to make ourselves masters of the narrative itself;—we begin afterwards to discriminate between the different ways in which different persons relate it. In the infancy of a literature, a digest of various testimonies may answer a great object by giving a general view of certain historical facts. The facts being once understood, the reader may be enabled afterwards to consider the strength or weakness of the several witnesses supporting them. It was under impressions of this kind that I got up the first number. If my views were wrong, I would thankfully receive correction.

2nd. "My Encyclopædia is, as you are aware, intended especially for Bengali readers, and therefore my attention is first and principally directed to the Bengali. However important the object which the English is intended to subserve may be, it is subordinate to the Bengali. The Diglot edition is indeed designed to promote the study of *both*, English and Bengali,—to accelerate the progress of the Native mind in the *two careers* (as you called them in your address to students) now open to Indian scholars in the province of Bengal. Still the Bengali is in my work the more important of the two. (*a*)

"My effort has been and shall continue to be, to present the history and science of Europe in as attractive and simple a dress as the subjects and the state of the Bengali language will allow." With this view it has been my practice to hear portions of my MSS. read by Pundits and other Vernacular scholars,—to note the passages where they might happen to stumble in the course of an un-premeditated reading,—to introduce improvements where the passages required to be amended,—to ask the opinion of learned scholars where difficulties presented themselves, and in these ways to render the work as elegant and perspicuous as circumstances would allow. The introductory essay on the study of history, (*b*) and the History of Rome, in the

(*a*) I must here apologize for a few erroneous expressions in English which crept into the text; and I have to thank the editor of the *Hurkaru* for the mistake pointed out. The mistake did not however occur in the Bengali text.

(*b*) This essay I had delivered, before it was printed, as a discourse, at a meeting of intelligent and respectable Hindu gentlemen. The following speech by the president has been forwarded to me as an authenticated extract from the records of their Society :—

"The Revd. K. M. Banerjea read a Bengali Paper on the study of History.

"Baboo Kissory Chand Mittra then rose and said that he was sure he expressed the sentiments of the whole meeting when he declared that the

first number I had tested in these several ways, and may perhaps state, without the guilt of presumption, that the experiments proved all very favorable.

---

paper just read by his Revd. and respected friend was a very interesting and valuable one; the subject was handled very ably, and the principles of historic evidence analysed in a manner that could not fail to come home to "the business and bosoms" of those who, he hoped and trusted, were soon to receive, through the liberality of Government, a sound and useful education through the medium of their vernacular language. He could not but admire the *Bengali* of the paper. It was not only chaste and devoid of oriental flourish, but as elegant and classical as the language under the present circumstances could be rendered. He (Baboo Kissory Chand) looked forward to the publication of such essays (as the one just read) as a new era in the history of the Bengali language, the improvement and cultivation of which was intimately connected with the regeneration of his fatherland: That the language was imperfect, was no reason why it should not be cultivated and improved. True, that it was destitute of a healthy literature. True, that it was inadequate to the expression of subtle metaphysical distinctions. True, that it wanted a scientific nomenclature. But its deficiencies ought to operate as so many fresh arguments for its improvement with those who are interested in the well-being of their country, as the vernacularization of European literature and science was a consummation devoutly to be wished. He would therefore conclude by saying that his Revd friend, by his exertions in furtherance of this good work, has entitled himself not only to the thanks of the society but to the gratitude of his countrymen."

COSSINATH DUTT,
Secy. H. T. S.

The same essay was submitted for perusal to a gentleman of the civil service, J. Muir Esq. of Azimghur, whose experience as an oriental scholar and established reputation for Sanscrit authorship render his opinion of no common value. He says:

"I like very much the substance and strain of your introductory remarks on the use and criteria of History, and think the whole is the very sort of thing calculated to be extensively useful in the present state of the native mind."

A portion of the History of Rome was shown to Capt. Marshall of the College of Fort William. His opinion is contained in the following letter:—

"MY DEAR SIR, *July* 11*th*, 1845.

"I have the pleasure to return the specimen of your Translation of the History of Rome. I have suggested a few alterations which are not of much importance. I am of opinion, that the style is simple and pleasing, and well adapted for the perusal of young people. The matter is also I think well selected, and as amusing as so compendious a narrative could possibly be made. Your little work would in my opinion answer admirably for a School Class book for junior Students.

"I remain,, My dear Sir.
"Yours very truly,
"G. MARSHALL."

"P. S. I have made a note at the end of your MSS."

My plan in historical narratives is to adopt as simple a style as possible. Where words are required that are not in common use, I draw from the Sanscrit, if that can be readily done, without having recourse to far-fetched inventions. Where an idea can be easily expressed by a Persian or Hindoostani word, already current, I make no scruple to adopt it, in case no Sanscrit or Bengali word can be found equally apt for the purpose. Where Persian or Hindoostani words have been almost *naturalized* in Bengali, I do not fastidiously reject them, even though there may be corresponding Bengali words with the same meaning. In such cases I use the Bengali and the Hindoostani indifferently, only taking care not to shock my readers

---

I also requested Mr. Lodge, the Inspector of Government Colleges and Schools, to send the work in sheets to the Schools in the Muffusil for any suggestions the pundits might have to offer. The following letter from the head master of the Midnapore School to the address of Mr. Lodge reports the result of this test:—

"With much pleasure I acknowledge the receipt of your letter of the 2nd instant accompanied by a few pages of the intended Encyclopædia Bengalensis. I have read the Bengali translation of it, and made our Pundit and the vernacular School Teacher do the same; and to ascertian whether they clearly understood it, required them to explain almost every sentence, which they did very well; there is only one word (বিকৃত) to which they were at a loss to attach the correct idea, and it must be acknowledged that it is seldom used to convey the meaning it is intended to represent, that of garbling, and without a circumlocution there is no word in the Bengali language that can express the idea. With the exception of this single observation, which is scarcely worth mentioning, there is nothing else to be remarked on. The Pundits here speak highly of its language and consider it purely idiomatical.

"The work appears to be written in very plain and simple language, intelligible almost to every native who pretends to the least knowledge of his literature, and although not a close translation, it conveys the sense of the English very faithfully.

"I think the work might with much benefit to the Zillah Schools be introduced in them. It will give the boys a great deal of useful information and prepare them for subjects they will afterwards learn in English; and as there is no translation in Bengali of the History of Rome that I know of, except a part of it in the Epitome of Ancient History by Mr. Pearson, which has not afforded satisfaction on account of its idiomatical defects, the present work will be a desirable addition to the existing Bengali literature, especially if the forthcoming parts be written in as plain and simple a style as the specimen you have kindly sent me, and which I herewith return."

by disregarding their taste in this respect. The word *thousand*, for instance, I have sometimes translated by *hazar*, sometimes by *sahasra*. It is, I think, an advantage where foreign words may be introduced into a language, such as the Bengali now is, consistently with perspicuity and without shocking the national feelings of the people. This is, I think, the legitimate way of enriching the vocabulary of such a language. Where a Sanscrit word, though expressing originally the idea I intend to convey, has by the lapse of ages obtained a different signification, I do not hesitate to use some popular term having the same meaning, though it may be of foreign derivation. I have for instance generally translated *ship* by *jahaj*, though this is neither Sanscrit nor Bengali; because the Sanscrit *nauka*, though exactly corresponding to the Latin *navis*, is now used in Bengali to express a *boat* rather than a *ship*.

Scientific terms I borrow from the English when the Sanscrit fails to produce any, either ready-made, or capable of being easily invented. In Geometry and Algebra, however, I have scarcely experienced any difficulty in procuring terms, since the Sanscrit vocabulary here is very full. The *Lilavati*, the *Vijanita*, the *Goladhyaya* have supplied me almost with every thing I wanted. The *Rekha Ganita*, or Euclid in Sanscrit, and Colebrooke's Algebra have been of great use to me in this number on Geometry. A number of terms proposed by the accomplished *Bapu Deva* of the Sanscrit College, Benares, and obligingly sent to me by the late principal of that institution, has also been of great service. Still however I have been obliged to transfer one or two European expressions to the Bengali. The word *Rhombus*, for instance, is rendered in the Sanscrit Euclid by such a cumbrous term that I thought it would

be better to adopt the European expression itself, and explain it in the definition, than introduce a long *un*classical Sanscrit term. (*c*) If ῥομβος or ῥεμβω conveyed any meaning that would render the idea of an equilateral parallelogram obvious, I would think of inventing a word which might have the same radical signification.

The favourable reception which the first number has obtained from the native community, may, I presume, be considered an auspicious commencement. Upwards of two hundred copies have already been disposed of, chiefly among native purchasers; and if the demand from this quarter continue as great as it has hitherto been, the first number will be out of print before the second makes its appearance. The native press has likewise pronounced a very favourable verdict. I have not seen the criticisms of the native editors in the original, but agreeably to the accounts which the English papers have given they are encouraging to the undertaking. (*d*)

Under these circumstances I beg leave to solicit the favor of your advice on the subjects adverted to. The sanction of your opinion, as far as you may approve of what has

---

(*c*) The word for rhombus in the Sanscrit Euclid is *Vishama-Kona-sama-chaturbhujam*, literally, unequal-angled-equi-quadrilateral.

(*d*) "*Encyclopædia Bengalensis.*—Some of our native contemporaries have reviewed the first volume, containing Roman History, and are decidedly of opinion that the publication of the work will form an æra in the history of vernacular literature. They find fault with the criticisms of the English papers, and are disposed to believe that instead of doing any good they are calculated to discourage the Revd. editor in the prosecution of his laudable undertaking. They speak very highly of the *Bengali* of Krishna Mohun, and say that it is as eloquent and classical as the language in its present imperfect state could be rendered "—*Beng. Hurkaru, Feb.* 23, 1846.

I feel it right to state that a writer has since appeared in one of the native papers enunciating the universal negative that "*not a single letter in the Bengali of the work is intelligible*" and then, entering into personal reflections against the author and against those who have ventured to pronounce a favourable opinion on the publication.

been done, and the benefit of your correction, where you may consider it open to censure, must be of the greatest advantage to the undertaking.

I have already, Hon'ble Sir, trespassed too long upon your time; but I cannot conclude a statement like this without appending a few remarks on the present number of the series. The perspicuity of the following Bengali version of the first three books of Euclid was, agreeably to my usual practice, tested by being submitted to the perusal of pundits, who had not studied the subject through the medium of the English. The elements of Euclid could scarcely be expected in any language to be wholly intelligible to a beginner from an unpremeditated off-hand reading; but the pundits to whom I handed over these sheets went through them so well, and followed the demonstrations so closely, step by step, that I think I can safely say the result of the test proved much more satisfactory than I could possibly have expected. The case of one of these pundits was in particular so very striking that I cannot refrain from stating it more minutely. In the correction of the proof-sheets, I had the happiness to secure the assistance of one of the passed students of the Government Sanscrit College at Calcutta, who is now attached as Bengali tutor to one of the metropolitan institutions, under the superintendence of the Council of Education. This accomplished scholar, with no other preparation than the perusal of the 1st Prop. in the *Rekha Ganita,* mastered the demonstrations, as he went over the proof-sheets, with a quickness that was as surprising as the evidences of his really understanding them were satisfactory. *Literal* errors sometimes occurred in the proof-sheets, which occasioned a discrepancy between the demonstrations and the diagrams to which they referred. These errors, though at

only to puzzle and confound, he almost invariably detected by his own sagacity, and corrected by comparing the text with the diagrams. I need scarcely add that no one who did not thoroughly comprehend the demonstrations could be equal to this task. It would be an act of flagrant injustice to my learned and ingenious friend, were the merit of this wonderfully quick apprehension to be solely or even principally attributed to the translator's skill. Few pundits can be found capable of understanding so readily and from such a necessarily hasty perusal the peculiar methods of mathematical reasoning. Still what *he* succeeded in mastering *impromptu*, others may, it is hoped, be enabled to grapple with, after such initiatory preparations as the exact sciences require in all ordinary cases.

In one or two respects the Bengali language labours under slight disadvantages as a medium of communicating the truths of Geometry. Technical terms, as I have elsewhere stated, are not indeed wanting; but, owing to a peculiarity in its grammar, it cannot easily combine the brevity and the precision so essential to the language of mathematics. The genitive case of nouns is, for instance, formed in Bengali, not as in the more common form in English, by the prefixing of a preposition *(of)*, but by the addition of a servile letter (র) to the word inflected; as from rekha (a line)—*gen.* rekha*r* (*of* a line). When therefore a set of letters AB or ABC representing a line or an angle requires to be put in the genitive (as in the phrase *the square of AB*), the only ways in which this can be done appear all to be somewhat objectionable, though not materially. For if the servile letter (র) indicative of the genitive were added, the student might be in danger of mistaking the inflecting *servile* for a *ra-*

dical; thus কখর might be mistaken for a set of *three* letters instead of the genitive of কখ. If, on the other hand, the letters indicating a line, as in the phrase mentioned above, were left undeclined, there might be the danger of *identifying* the letters with the *square*, as if it were the *square AB* instead of the *square* OF *AB*. The only other alternative would be to repeat the term for a *line*, and inflect it instead of the letters; as the *square of the line AB* (কখ রেখার সমচতুর্ভুজ); but this rule, if invariably followed, would introduce such constant repetitions, as would render the work extremely verbose. I have generally followed the second of these alternatives, trusting to the correction of any possible mistake by the context. I fancy this is also the course frequently followed by mathematicians writing in Latin. The phrase the *square of AB* would I suppose be sometimes Latinized *quadratum AB*, the reader being expected to find out from the context that AB is in the genitive governed by quadratum and not in apposition to it. The same rule prevails I believe likewise in Greek, though there the article must render the meaning sufficiently obvious; του or της AB could never be ambiguous.

Though I have generally followed this rule I shall be truly grateful for any advice I may be favoured with from any scholar.

I have the honor to be,
Hon'ble Sir,
Your Most Obedient Servant,
K. M. BANERJEA.

Calcutta, February 26th, 1846.

FROM THE PRESIDENT OF THE COUNCIL OF EDUCATION

TO

THE REV. K. M. BANERJEA.

Calcutta, April, 1846.

SIR,—I have received your letter of February 26, in which you solicit my advice and direction as to the future conduct of your work with reference to the criticisms which have appeared in the Newspapers.

I understand you to speak of such criticisms as have some foundation, or at least an appearance of foundation in reason. These appear to me to be reducible to three heads : viz. criticisms upon your English style, upon your mode of translating Eutropius, upon your selection of that writer's work.

They who find fault with your English style do not perhaps advert to the fact that the English in your book is quite subordinate to the Bengali. Whether it is actually a translation of the Bengali, or not, it is for the present purpose to be considered as a translation.

It cannot be fairly criticised, if it is regarded as an original and independent English work. In writing the Bengali Introductory Remarks on the study of History, which is an original and independent work, you had to consider, not in the spirit of a servile flatterer, but in the spirit of an indulgent Instructor, what might be agreeable to the taste of those whom you were addressing. In writing the English you had nothing to aim at but such a correct representation of what you had already said in Bengali, as would enable the Council of Education and such part of the British nation as take an interest in the matter, to judge of your work.

Peculiarities of expression, that is to say what would be peculiarities in an original English Book, are not therefore in my opinion blemishes in your composition. When you submitted your MS. to me for criticism, I never thought of effacing those peculiarities. If I had done so, the English would no longer have been an accurate reflection of the Bengali.

The Council of Education want to know exactly what you are saying to your countrymen. The portion of the English Public here and at home who are interested in the improvement of Bengali literature, will no doubt be desirous of learning what style of reasoning, what illustrations, what turns of thought, are considered by a Bengali scholar likely to captivate the attention and stimulate the mental activity of his race.

If you had undertaken to write an original English Book, you would, I doubt not, have endeavoured to think and to express yourself like an Englishman. But such an endeavour would have been out of place in your Encyclopædia.

It is quite true, however, that some careless expressions have escaped you in composing, and me in reading your composition.

Perhaps in the circumstances amidst which we are placed, some errors of this kind are inevitable. We must do our best to prevent them, and certainly can have no complaint to make against those who point out our failures.

The criticisms upon your plan of translating Eutropius freely and interspersing additional matter from various sources appear to me unfounded.

To translate freely and to intersperse foreign matter, while you are professing to adhere closely to your original, would be morally wrong, because it would mislead.—But to do this, as

you have done, with distinct proclamation of your intention; can only be improper, if at all, in a literary point of view.

If you, or any one who may aspire to emulate you as an Instructor of the people of Bengal, were, in introducing Thucydides to your countrymen, to deal with him as you have dealt with Eutropius, you would be justly obnoxious to censure. But why? Because the work is a model of historical composition, and because the writer is a most trustworthy narrator of the events of his own age and country.

If you ever do publish a Bengali Thucydides, I am quite sure that you will endeavour to show him to your countrymen exactly as he is. You will never dream of altering his text. If you have any remark of your own to make upon the Peloponnesian war, or wish to draw attention to what other writers have said, you will add notes to your edition.

You would have too much reverence for so grand a work of art to think of adding a sentence to it. Such an interpolation would be as offensive as if a sculptor or painter of the present day were to add a figure to a group of Phidias or Raphael.

Neither would you think of inserting a story out of Plutarch in the midst of the testimony which the great witness of the Peloponnesian war has delivered to posterity.

So also with regard to such an author as Livy. Though he relates facts remote from his own time, and aims rather at the glorification of Roman warriors and statesmen than at truth, still if you were to translate his beautiful narrative, you would no doubt remember that the main object of your translation would be, not to exhibit the History of Rome, but the work of Livy.

But can any one think that Eutropius has any claim to this, kind of consideration? A writer with no other pretension than that of having made for the use of the Emperor Valens, in a

degenerate age, a careful Epitome of Roman History from the foundation of the city?

Eutropius' book is no model which it would be a sort of sacrilege to touch. Eutropius is no authority for the facts he relates. You did not want to show the people of Bengal how he tells a story, you did not mean to call him as a witness to facts which happened hundreds of years before he was born.

What you wanted was an epitome of Roman History, and finding it done to your hand by Eutropius, you very wisely translated and added to him, instead of epitomizing Roman History yourself.

No one can be deceived as to the real nature of your work, because you have distinctly pointed it out. Whether what you have added to Eutropius was fit to be added for the instruction of your countrymen, is another question. I believe nobody has said it was not.

There yet remains a further and more important question, viz. whether the epitome of Roman History which you have published, ought to have had the first place or any place at all in your Encyclopædia.

Assuming that the epitome ought to have a place, I should say that the question whether, with reference to its intrinsic qualities, it ought to have the first place, is scarcely worth considering. My advice would have been "of those things which you intend to insert, begin with that which you can soonest get ready."

I am far too glad to see a beginning made in this new Bengali literature to care whether, in a work intended to be miscellaneous, the first article can be proved to have irresistible intrinsic claims to the particular position which it occupies.

But ought such an epitome of Roman History to have any place at all in your Encyclopædia?

I think that it ought: I believe that the History of Rome is a most important study for your countrymen, for the reason which you have assigned in the letter you have addressed to me, and also for another reason of more special application to British India, on which want of time and space prevents me from entering at present. I believe that those who are beginning the study of any history (whether nations or individuals) should not be at once introduced to elaborate, detailed, and critical works, and I believe also that only in works of that kind can an account of the labours of such critics as the great Niebuhr, by which men's faith in much of Roman History has been shaken, be properly introduced.

Upon this subject I can refer you to something much more satisfactory and conclusive than any reasoning of my own; I mean the opinion, and the grounds on which it rests, of the late Dr. Arnold, himself a profound historian, a devoted admirer and follower of Niebuhr, and one of the most successful instructors of youth:—

"Now it is not so much our object," he says, "to give boys useful information, as to facilitate their gaining it hereafter for themselves, and to enable them to turn it to account when gained. The first is to be effected by supplying them on any subject with a skeleton which they may fill up hereafter. For instance, a real knowledge of history in after life is highly desirable, let us see how education can best facilitate the gaining of it. It should begin by impressing on a boy's mind the names of the greatest men of different periods, and by giving him a notion of their order in point of time and the part of the earth on which they lived. This is best done by a set of pictures bound up together in a volume, such, for

instance as those which illustrated Mrs. Trimmer's little histories, and to which the author of this article is glad to acknowledge his own early obligations. Nor could better service be rendered to the cause of historical instruction than by publishing a volume of prints of universal history, accompanied by a very short description of each. Correctness of costume in such prints, or good taste in the drawing, however desirable, if they can be easily obtained, are of very subordinate importance; the great matter is that the print should be striking, and full enough to excite and to gratify curiosity. By these means, a lasting association is obtained with the greatest names of history, and the most remarkable actions of their lives, while their chronological arrangement is learnt at the same time from the order of the pictures; a boy's memory being very apt to recollect the place which a favorite print holds in a volume, whether it comes towards the beginning, middle, or end, what picture comes before it, and what follows it. Such pictures should contain as much as possible the poetry of history; the most striking characters, and most heroic actions, whether of doing or of suffering; but they should not embarrass themselves with its philosophy, with the causes of revolutions, the progress of society, or the merits of great political questions. Their use is of another kind; to make some great name, and great action of every period familiar to the mind; that so in taking up any more detailed history or biography, (and education should never forget the importance of preparing a boy to derive benefit from his accidental reading) he may have some association with the subject of it, and may not feel himself to be on ground wholly unknown to him."

Now the Epitome of Eutropius contains just such short descriptions as would be fit to accompany the historical

prints which Dr. Arnold recommends. The descriptions with the prints would be the best thing. But you have not got the prints; and the descriptions without them are the next best thing. We have very good evidence I think that this was Dr. Arnold's own view of the matter; for the passage I have been quoting is to be found in an article which he contributed to the Quarterly Journal of Education; that article begins with an account of Rugby School, over which he presided with so much credit and success; and if you look in that account for the method in which Roman History was studied by Dr. Arnold's Pupils at Rugby, you will find that he made them begin, as you are making your countrymen begin, with Eutropius.

I dare say nobody ever thought of blaming Dr. Arnold for this. But your enterprize, on account of its novelty, its boldness, and its magnitude, naturally and not unreasonably invites criticism. And therefore it has been objected to you that the early part of what you have given as Roman history, though handed down to us by antiquity, has been proved untrustworthy by modern researches and modern criticisms.

But I think you were right nevertheless to exhibit in the first instance to the nation you have undertaken to instruct, (as Dr. Arnold, we have seen, exhibited to his scholars) the History of Rome as it was transmitted to posterity by the Romans themselves.

For such researches and criticisms as those of Niebuhr would be wholly out of place in a work intended for the purposes described in the above extract from Arnold, much more out of place even than "the philosophy," "the causes of revolutions, the progress of society," "and the merits of great political questions," with which he justly says such a work ought not to be embarrassed.

Those narratives which the Roman people received and transmitted to us as the history of their ancestors, cannot now be cast aside as so much useless trash. They are not to be treated as mere fraudulent inventions.

A fabricated story of the sinking of the French man-of-war *Vengeur* found its way not long ago into history, and kept its place there for some years. Very lately the true story came to light. I have not the means of referring to Mr. Carlyle's account of the way in which the truth was discovered; but, if I recollect rightly, the French Government most readily and courteously afforded access to its official records; and if I am not mistaken in this, it may be worth your while to look for the account, and to give this part of it as a striking proof of the sincere desire for historic truth which animates the Governments of Europe, and which is a characteristic mark of high civilization. No honest and intelligent man would now think of repeating the fabricated story, or if he did repeat it for some special purpose, would take care to point out the fraud to his readers.

But the early History of Rome ought not to be classed with such a fabrication as this. The fact that during long ages it was received by the people of Rome as the genuine history of their progenitors, that it was no tissue of falsehoods woven by deceitful men with a view to impose upon the credulous, ought to secure it from such an association. I do not think we are less called upon to read it now than before Niebuhr wrote. Niebuhr himself never intended that it should be blotted out, nor that it should be held up to scorn as a mere fraudulent invention. I could prove this by numerous passages in his great work; I will quote one, which sufficiently evinces what he thought of those ancient accounts and which will at the same time demonstrate how vain an attempt it would be to give his opinion a place in your Epitome.

After relating the first part of the story of Romulus and Remus, the great historical critic thus muses upon his subject.

" This is the old tale, such as it was written by Fabius, and sung in ancient sacred lays down to the time of Dionysius. It certainly belongs to anything rather than history; its essence is the marvellous; we may strip this of its peculiarities, and pare away and alter, until it is reduced to a possible every day incident; but we ought to be firmly convinced, that the *caput mortuum* which will remain, will be anything but a historical fact. Mythological tales of this sort are misty shapes, often no more than a *fata morgana*, the prototype of which is invisible, the law of its refraction unknown; and even were it not so, still it would surpass any powers of reflexion, to proceed so subtly and skilfully, as to divine the unknown prototype from these strangely blended forms. But such magical shapes are different from mere dreams, and are not without a hidden foundation of real truth. The name of dreams belongs only to the fictions imagined by the later Greeks, after the tradition had become extinct, and when individuals were indulging a wanton license in altering the old legends; not considering that their diversity and multiplicity had been the work of the whole people, and was not a matter for individual caprice to meddle with." *Niebuhr's History of Rome. Translation of Hare and Thirlwall*. I. 219.

This extract, I say, from Niebuhr's stupendous work, not only serves to show the value he set upon early Roman history; but also proves decisively how utterly unfitted his speculations, or even their results, are, to be communicated to beginners in History.

If it should be said that, although such a passage as this, is unfitted for that purpose, an explanation of it might be

given instead of the passage itself; the answer is, that any explanation, which should make such a passage as this intelligible to an uninstructed mind (be it the mind of a person or of a people) would be nothing less than a course of lectures on Mythical and Historical narration and their mutual relations.

Before I close this letter it will be proper to advert to the method which Dr. Arnold has pursued in his History of Rome in consequence of the labours of Niebuhr.

In the preface to that work he says.—

"The form and style in which I have given the legends and stories of the first three centuries of Rome may require some explanation; I wished to give these legends at once with the best effect, and at the same time with a perpetual mark, not to be mistaken by the most careless reader, that they were legends and not history. There seemed a reason, therefore, for adopting a more antiquated style, which otherwise of course would be justly liable to the charge of affectation."—*Arnold's History of Rome, Preface*, 10.

It is obvious that this plan of distinguishing the early from the later and more authentic portions of history by differences of style, could not be adopted in an Epitome, because such a work affords no room for exhibition of style; and it could not be attempted in a Bengali work, because the existing literature of that language does not supply the various models of which such an attempt pre-supposes the existence.

I think, then, you may rest in the assurance that you have done wisely in translating into Bengali the common story of the early ages of Rome, without attempting for the present to explain what relation this story bears to an authentic narration of real facts.

The time will come, I hope, but we must not expect it to come very quickly, when you, or those who tread in your footsteps, may show Niebuhr himself to Bengali eyes capable of looking at him not with blank astonishment, but with intelligent admiration.

I am, Sir,

With much esteem,

Your obedient Servant,

C. H. CAMERON.

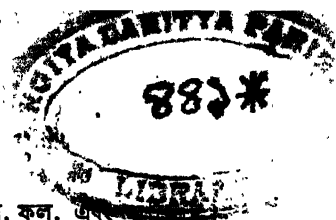
⁎ Though the ancient Hindus had, to a great extent, cultivated the sciences of Algebra and Geometry, and though the elements of Euclid themselves were translated into Sanscrit in the days of Rajah Jayasingha, the subjects may now be said to be entirely new to the natives of Bengal, except where they have studied them in English. The following extract from Lord Brougham's essay on the *objects, advantages, and pleasures of science* may therefore be an appropriate introduction to a branch of knowledge of which the Bengalee reader has no conception. The explanation of the signs of Algebraic notation, taken from the introductory part of Whewell's *Mechanical Euclid*, is intended to enable the reader to understand the summary given at the end of each proposition in Algebraic characters. The summary it is thought will help to impress the truths demonstrated the more strongly upon the learner's mind, and to show the relation between Algebra and Geometry.

OBJECTS, ADVANTAGES, AND PLEASURES OF SCIENCE.

INTRODUCTION.

In order fully to understand the advantages and the pleasures which are derived from an acquaintance with any Science, it is necessary to become acquainted with that Science; and it would therefore be impossible to convey a complete knowledge of the benefits conferred by a study of the various Sciences which have hitherto been cultivated by philosophers, without teaching all the branches of them. But a very distinct idea may be given of those benefits, by explaining the nature and objects of the different Sciences: it may be shown, by examples, how much use and gratification there is in learning a part of any one branch of knowledge; and it may thence be inferred, how great reason there is to learn the whole.

It may easily be demonstrated, that there is an advantage in learning, both for the usefulness and the pleasure of it. There is something positively agreeable to all men, to all at least whose nature is not most grovelling and base, in gaining knowledge for its own sake. When you see anything for the first time, you at once derive some gratification from the sight being new; your attention is awakened, and you desire to

পদার্থ বিদ্যার প্রয়োজন, ফল, [illegible]

কোন পদার্থ বিদ্যা শিক্ষা করিলে যে উপকার ও আমোদ জন্মে তাহা সম্পূর্ণরূপে বুঝিতে হইলে ঐ বিদ্যাতে ব্যুৎপন্ন হওয়া আবশ্যক, কিন্তু পণ্ডিতেরা যে২ বিবিধ বিদ্যার অনুশীলন করিয়াছেন তাহার সমস্ত শাখায় উপদেশ না দিলে যদিও সাধারণ পাঠকের নিকটে বাহুল্যরূপে উপকার বিস্তার করা অসাধ্য তথাপি ঐ বিবিধ বিদ্যার বিষয় ও তাৎপর্য্য বর্ণনা করিলে ফলের অনুভব যৎকিঞ্চিৎ স্পষ্ট হইতে পারে—কতিপয় উদাহরণ দেখাইলে বোধগম্য হইবে যে বিদ্যার কোন বিশেষ শাখাতে নিপুণ হইলে কেমত উপকার ও আহ্লাদ জন্মে এবং সমস্ত শাখায় পরিপক্ব হওয়া যে যুক্তিসিদ্ধ তাহা দুই এক বিশেষ শাখার ফল দর্শনে হৃদয়ঙ্গম হইবে।

বিদ্যা যে হিতকারিণী তাহা বিদ্যাধ্যয়নের উপকার ও আমোদ উভয়ের বিবেচনা দ্বারা সহজে উপপন্ন হইতে পারে—কেবল জ্ঞানার্থে বিদ্যোপার্জ্জনে প্রবৃত্ত সকল লোকেরই বাস্তবিক কিঞ্চিৎ হর্ষ জন্মিয়া থাকে যাহার মনে তাহা না জন্মে তাহার স্বভাব অতি অধম ও নীচ। যখন কোন বস্তুতে প্রথমতঃ দৃষ্টিপাত হয় তখন নূতনত্ব হেতুক সেদর্শনে তৎক্ষণাৎ অবশ্য কিঞ্চিৎ সুখানুভব আইসে পরে মনঃসংযোগ হইলে তদ্বিষয়ে আরো অধিক জ্ঞানের আকাঙ্ক্ষা হয়, যদি ঐ বস্তুতে কিছু বিশেষ শিল্প শক্তি থাকে অর্থাৎ যদি তাহা কোন প্রকার যন্ত্র, কিম্বা কল হয় তবে তাহা কিরূপে নির্ম্মাণ হইয়াছে কি প্রকারে

know more about it. If it is a piece of workmanship, as an instrument, a machine of any kind, you wish to know how it is made—how it works—and what use it is of. If it is an animal, you desire to know where it comes from—how it lives—what are its dispositions, and, generally, its nature and habits. You feel this desire, too, without at all considering that the machine or the animal may ever be of the least use to yourself practically; for, in all probability, you may never see them again. But you have a curiosity to learn all about them, because they are new and unknown. You accordingly make inquiries; you feel a gratification in getting answers to your questions, that is, in receiving information, and in knowing more,—in being better informed than you were before. If you happen again to see the same instrument or animal, you find it agreeable to recollect having seen it formerly, and to think that you know something about it. If you see another instrument or animal, in some respects like, but differing in other particulars, you find it pleasing to compare them together, and to note in what they agree, and in what they differ. Now, all this kind of gratification is of a pure and disinterested nature, and has no reference to any of the common purposes of life; yet it is a pleasure—an enjoyment. You are nothing the richer for it; you do not gratify your palate or any other bodily appetite; and yet it is so pleasing, that you would give something out of your pocket to obtain it, and would forego some bodily enjoyment for its sake. The pleasure derived from Science is exactly of the like nature,

চলে ও কি প্রয়োজন এ সমস্ত জানিবার ইচ্ছা জন্মে, অথবা উক্ত বস্তু যদি কোন জন্তু হয় তবে কোন্‌ দেশে তাহার উৎপত্তি কেমত স্বভাব কেমত রীতি কেমত সংস্কার কিরূপেই বা প্রাণ ধারণ করে এ সকল অবগত হওনের বাঞ্ছা জন্মে—তখন আপনাদের কোন উপকারের উদ্দেশে এই২ বৃত্তান্ত জানিবার ইচ্ছা হয় এমত নহে কেননা ঐ প্রকার বস্তু কিম্বা জন্তু পুনর্ব্বার দৃষ্টি গোচর হইবার কোন সম্ভাবনা নাই কেবল নূতন ও অপরিচিত এই বলিয়াই উহার সমস্ত বৃত্তান্ত অবগত হইতে বাসনা হয়—এই রূপে সকল বিষয়ের অনুসন্ধানে প্রবৃত্তি জন্মে—আর যাহা জিজ্ঞাসা করা যায় তাহার উত্তর পাইলে অর্থাৎ তদ্বিষয়ের অবগতিতে জ্ঞানের বৃদ্ধি হইলে সন্তুষ্টি হয়, যদি পুনশ্চ ঐ যন্ত্র কিম্বা জন্তু দৃষ্টি গোচর হয়, তবে পূর্ব্বে এক বার চাক্ষুষ প্রত্যক্ষ হইয়াছিল তাহা স্মরণে আমোদ জন্মে—তদ্বিষয়ে কিঞ্চিৎ অনুসন্ধান হইয়াছে এজন্য সুখবোধ হয়, আর যদি এমত কোন যন্ত্র কিম্বা জন্তু দৃষ্টি গোচর হয় যাহা কোন২ বিষয়ে প্রথম বস্তুর সমান কোন২ বিষয়ে প্রথম হইতে ভিন্ন তবে দুএর তুলনাতে মনের আহ্লাদ হয়—তাহাদের কিং ভাবে সাদৃশ্য কিং ভাবে বৈলক্ষণ্য ইহার বিবেচনাতে সুখবোধ হয়—আর এপ্রকার আমোদ নির্ম্মল ও নিস্পৃহ, ইহাতে অর্থাসক্তি নাই তথাপি সন্তোষ জনক ও সুখদ, এ জ্ঞানেতে ধনের বৃদ্ধি হয় না ইহাতে উদরের তুষ্টি কিম্বা অন্য কোন ইন্দ্রিয়ের অভিলাষ পূর্ণ হয় না—তথাপি এমত সুখানুভব হয় যে তজ্জন্য কিঞ্চিৎ ব্যয় করিতেও বৈরক্তি হয় না এবং তাহার প্রাপ্তির নিমিত্তে কোন শারীরিক সুখভোগ ত্যাগ করিতে, হইলেও লোকে সত্বর হয়। পদার্থ বিদ্যাতে যে সুখ জন্মে তাহা

or, rather, it is the very same. For what has just been spoken of is, in fact, Science, which in its most comprehensive sense only means *Knowledge*, and in its ordinary sense means *Knowledge reduced to a System;* that is, arranged in a regular order, so as to be conveniently taught, easily remembered, and readily applied.

The practical uses of any science or branch of knowledge are undoubtedly of the highest importance; and there is hardly any man who may not gain some positive advantage in his worldly wealth and comforts, by increasing his stock of information. But there is also a pleasure in seeing the uses to which knowledge may be applied, wholly independent of the share we ourselves may have in those practical benefits. It is pleasing to examine the nature of a new instrument, or the habits of an unknown animal, without considering whether or not they may ever be of use to ourselves or to any body. It is another gratification to extend our inquiries, and find that the instrument or animal is useful to man, even although we have no chance ourselves of ever benefiting by the information: as, to find that the natives of some distant country employ the animal in travelling;—nay, though we have no desire of benefiting by the knowledge; as for example, to find that the instrument is useful in performing some dangerous surgical operation. The mere gratification of curiosity; the knowing more to-day than we knew yesterday; the understanding clearly what before seemed obscure and puzzling; the con-

এই প্রকার—বরং স্বরূপতঃই এই, কেননা এইরূপ জ্ঞানই পদার্থ বিদ্যা, ইহাকেই ইংরাজিতে সাএন্স বলে, অতি ব্যাপক ভাবে ইহার অর্থ জ্ঞান, সাধারণ লৌকিক ব্যবহারে ইহার অর্থ নিয়মিত জ্ঞান—অর্থাৎ এ জ্ঞান এমত শৃঙ্খলা পূর্ব্বক বর্ণিত যে ইহার অনায়াসে উপদেশ দেওয়া যাইতে পারে এবং সহজে স্মরণ ও প্রয়োগ করা যাইতে পারে।

এবম্ভূত বিদ্যার প্রত্যেক শাখাতে ফলতঃ যে উপকার হয় তাহা নিঃসন্দেহ অতি মহৎ। জ্ঞান বৃদ্ধি হইলে প্রায় সকলেই সাংসারিক ধন ও সুখ প্রাপণে বাস্তবিক কৃতার্থ হয় কিন্তু আমরা ঐ২ বিষয়ের যে২ অংশ স্বয়ং ভোগ করিতে পাইব জ্ঞানেতে তদ্ব্যতিরিক্ত আরো অনেক প্রয়োজন দেখা যাইতেছে তদ্দর্শনেও আমোদ জন্মে, কোন নূতন যন্ত্রের গঠন কিম্বা কোন অবিদিত জন্তুর ব্যবহার নিরীক্ষণ করিলে আপনা-দের কিম্বা অন্য কাহারো লাভালাভ না ভাবিয়া যে সন্তোষ জন্মে তাহা পূর্ব্বে কহা গিয়াছে পরে আরো অধিক তত্ত্ব করিয়া যদি অবগতি হয় যে ঐ যন্ত্রে কিম্বা জন্তুতে কোন২ মনুষ্যের উপকার আছে তবে তাহাতে আপনাদের কখন কিঞ্চিৎ লাভ হইবার সম্ভাবনা না থাকিলেও সে জ্ঞানে পুনশ্চ সুখবোধ হয়, তাহার প্রমাণ এই—যদি ঐ জন্তুকে কোন দূর দেশস্থ লোকে বাহন স্বরূপে ব্যবহার করে তথাপি আপনাদের ইষ্টাপত্তি না থাকিলেও সে জ্ঞানে আমোদ জন্মে আর যদি বোধ হয় যে ঐ যন্ত্র বিশেষ প্রাণ সংশয় পীড়াতে শরীরের কোন অঙ্গচ্ছেদ করণার্থে নির্ম্মিত হইয়াছে তবে আপনাদের এমত উপকারের অংশী হইতে বাসনা না থাকিলেও পরিতোষ হয়। কেবল জ্ঞানের আকাঙ্ক্ষা পূর্ণ করা—কল্য যাহা২ জানিতাম অদ্য তাহার অতিরিক্ত জানা—পূর্ব্বে যাহা অস্পষ্ট ও বুদ্ধির অগো-চর ছিল তাহা এক্ষণে হৃদয়ঙ্গম করা—সামান্য সত্যের চিন্তা

templation of general truths, and the comparing together of different things,—is an agreeable occupation of the mind; and, beside the present enjoyment, elevates the faculties above low pursuits, purifies and refines the passions, and helps our reason to assuage their violence.

It is very true, that the fundamental lessons of philosophy may, to many, at first sight, wear a forbidding aspect, because to comprehend them requires an effort of the mind somewhat, though certainly not much, greater than is wanted for understanding more ordinary matters; and the most important branches of philosophy, those which are of the most general application, are, for that very reason, the less easily followed, and the less entertaining when apprehended, presenting as they do few particulars or individual objects to the mind. In discoursing of them, moreover, no figures will be at present used to assist the imagination; the appeal is made to reason, without help from the senses. But be not, therefore, prejudiced against the doctrine, that the pleasure of learning the truths which philosophy unfolds is truly above all price. Lend but a patient attention to the principles explained, and giving us credit for stating nothing which has not some practical use belonging to it, or some important doctrine connected with it, you will soon perceive the value of the lessons you are learning, and begin to interest yourselves in comprehending and recollecting them; you will find that you have actually learnt something of science, while mere-

এবং বিবিধ পদার্থের পরস্পর তুলনা—এ সমস্ত মানসিক ব্যাপার হর্ষজনক, এবং এ ব্যাপারে ক্ষণিক সুখ বোধ ব্যতিরিক্ত মনও উন্নতি পাইয়া অধম ক্রিয়া হেয় করে, আর অন্তঃকরণের ভাব শুদ্ধ ও পরিষ্কার হয়, এবং রাগাদির অত্যাচার দমনার্থে বিবেক শক্তি তেজস্বিনী হয়।

দর্শন শাস্ত্রের মূল সূত্র অনেকের পক্ষে প্রথমতঃ বিরক্তি জনক বিষয়ের ন্যায় প্রতীত হয় ইহা সত্য বটে কেননা তাহা হৃদয়ঙ্গম করা নিতান্ত দুষ্কর না হইলেও সামান্য বিষয়াপেক্ষা যৎকিঞ্চিৎ অধিক বুদ্ধি চেষ্টার অপেক্ষা করে। দর্শন বিদ্যার অতি মহা২ শাখার প্রয়োগ অতি ব্যাপক হওয়াতেই তাহার অনুশীলন দুষ্কর এবং তন্নিমিত্তেই বোধ জন্মিলেও বহু আমোদ জন্মে না—কেননা এমত ব্যাপক লক্ষণে বিশেষ ব্যষ্টি প্রকরণের অভাব হেতুক কোন পদার্থের মানসিক প্রত্যক্ষ হয় না—আর আমিও এই সকল বিষয়ের আলোচনাতে মনের কল্পনা সহজ করণার্থে সম্প্রতি কোন সাবয়ব দৃষ্টান্তের উদ্দেশ করিব না, এস্থলে বাহ্যেন্দ্রিয়ের সাহায্য না লইয়া কেবল বিবেক শক্তিকেই সত্যের মীমাংসা করিতে অনুরোধ করিব কিন্তু এই কারণে বিবেচনা না করিয়া পূর্ব্বেই নিশ্চয় করিওনা যে দর্শন শাস্ত্রে নিষ্পন্ন সত্য যথার্থ অমূল্য ধন নহে—এ বিদ্যার মূল সূত্রের ব্যাখ্যা যদি ধৈর্য্য পূর্ব্বক অবধান কর আর যদি বিশ্বাস কর যে আমরা অনর্থক ও নিতান্ত নিষ্প্রয়োজন কথার উল্লেখ করিব না এবং যাহাতে কোন মহার্থক উপদেশ নাই এমত বচনেরও প্রস্তাব করিব না তবে ইহার মাহাত্ম্য শীঘ্র বুঝিয়া তাহা হৃদয়ঙ্গম করিতে আপনারাই যত্নশীল হইবা তখন দেখিতে পাইবা যে পদার্থ বিদ্যার অভিপ্রায় ও প্রয়োজন মাত্র বিবেচনাতে বিষয়ের যৎকিঞ্চিৎ উপদেশ বিস্তার হইয়া থাকে, পরে কোন২ অঙ্গের নির্দশন পরীক্ষা করিয়া সমস্ত বিষয় শিক্ষাতে

ly engaged in seeing what its end and purpose is; you will be enabled to calculate for yourselves, how far it is worth the trouble of acquiring, by examining samples of it; you will, as it were, taste a little, to try whether or not you relish it, and ought to seek after more; you will enable yourselves to go on, and enlarge your stock of it; and after having first mastered a very little, you will proceed so far as to look back with wonder at the distance you have reached beyond your earliest acquirements.

The Sciences may be divided into three great classes: those which relate to *Number and Quantity*—those which relate to *Matter*—and those which relate to *Mind.* The first are called the *Mathematics*, and teach the properties of numbers and of figures; the second are called *Natural Philosophy*, and teach the properties of the various bodies which we are acquainted with by means of our senses; the third are called *Intellectual* or *Moral Philosophy*, and teach the nature of the mind, of the existence of which we have the most perfect evidence in our own reflections; or, in other words, they teach the moral nature of man, both as an individual and as a member of society. Connected with all the sciences, and subservient to them, though not one of their number, is *History*, or the record of facts relating to all kinds of knowledge.

Mathematical Science.—The two great branches of the *Mathematics*, or the two mathematical sciences, are *Arithmetic*, the science of number, from the Greek word signifying *number;* and *Geometry*, the science of

পরিশ্রম করা কি পর্য্যন্ত সার্থক তাহা আপনারাই গণনা করিতে পারিবা—ইহার অল্পাংশের আস্বাদ পাইলে মিষ্টরস কিনা এবং আরো অধিকাংশ অনুসন্ধান কর্ত্তব্য কিনা তাহা পরীক্ষা করিতে পারিবা—এই রূপে উত্তরোত্তর ব্যুৎপন্ন হইয়া বিদ্যার রাশি বৃদ্ধি করিতে পারিবা এবং প্রথমতঃ যৎকিঞ্চিৎ অবগত হইয়া পরে এত দূর পর্য্যন্ত বোধগম্য করিতে পারিবা যে তখন তোমাদের আদ্য অবস্থার জ্ঞান মনে করিলে চমৎকার বোধ হইবে।

পদার্থ বিদ্যা তিন প্রধান শ্রেণীতে বিভক্ত হইতে পারে—প্রথমতঃ সংখ্যাও রাশি সম্বন্ধীয়, দ্বিতীয়তঃ পদার্থ সম্বন্ধীয়, তৃতীয়তঃ মানসিক ব্যাপার সম্বন্ধীয়—প্রথমোক্ত শ্রেণীর নাম ইংরাজিতে মাথেমেটিক্স কহে অর্থাৎ গণিত শাস্ত্র, ইহাতে অঙ্ক এবং ক্ষেত্রের গুণ শিখায়,—দ্বিতীয়ের নাম ইংরাজিতে ন্যাচুরল ফিলসফি অর্থাৎ স্বাভাবিক বস্তুতত্ত্ব, ইহাতে ইন্দ্রিয় গ্রাহ্য যাবদীয় বস্তুর গুণ শিখায়—তৃতীয়ের নাম মানসিক তত্ত্ব কিম্বা নীতি বিদ্যা, ইহাতে আপনাদের বিবেচনাতেই সম্পূর্ণ প্রমেয় যে মন তাহার স্বভাব প্রকাশ করে এবং আপনাদের ও সাধারণ সমাজের সম্বন্ধে মনুষ্যের ধর্ম্মাধর্ম্ম কি তাহা অবগত করায়, এই২ বিদ্যার সংযুক্ত আর এক উপকারিণী শাখা আছে—তাহা স্বতন্ত্ররূপে গণ্য নহে তাহার নাম পুরাবৃত্ত অর্থাৎ সকল প্রকার বিদ্যা সম্বন্ধীয় ঘটনার বিবরণ।

অথ মাথেমেটিক বিদ্যা।—মাথেমেটিক বিদ্যার দুই মহতী শাখা. উভয়ই পৃথক২ মাথেমেটিক বিদ্যা বাচ্য হইতে পারে, প্রথমতঃ গণিত অর্থাৎ অঙ্ক গণনা ইহাকে ইংরাজিতে আরিথ্-

figure, from the Greek words signifying *measure of the earth,*—land-measuring having first turned men's attention to it.

When we say that 2 and 2 make 4, we state an arithmetical proposition, very simple indeed, but connected with many others of a more difficult and complicated kind. Thus, it is another proposition, somewhat less simple, but still very obvious, that 5 multiplied by 10, and divided by 2 is equal to, or makes the same number with, 100 divided by 4—both results being equal to 25. So, to find how many farthings there are in 1000*l.*, and how many minutes in a year, are questions of arithmetic which we learn to work by being taught the principles of the science one after another, or, as they are commonly called, the *rules* of addition, subtraction, multiplication, and division. Arithmetic may be said to be the most simple, though among the most useful of the sciences; but it teaches only the properties of particular and known numbers, and it only enables us to add, subtract, multiply, and divide those numbers. But suppose we wish to add, subtract, multiply, or divide numbers which we have not yet ascertained, and in all respects to deal with them as if they were known, for the purpose of arriving at certain conclusions respecting them, and, among other things, of discovering what they are; or, suppose we would examine properties belonging to all numbers;

মেটিক কহে, দ্বিতীয়তঃ ক্ষেত্র তত্ত্ব অর্থাৎ ক্ষেত্রের পরিমাণাদি বিদ্যা ইহাকে ইংরাজিতে জিওমেত্রি কহে দুই গ্রীক শব্দ হইতে ইহার উৎপত্তি বাক্যার্থ ভূমি পরিমাণ।

দ্বিসংখ্যক অঙ্কের যোগে চারি হয় এই সামান্য কথাতেও গণিতের উল্লেখ আছে এ কথা অতি সহজ বটে কিন্তু ইহার সহিত অনেক প্রকারে মিশ্রিত এবং কঠিন বহু বিধ কথার সংযোগ আছে—যথা পাঁচকে দশ গুণ করিয়া পরে দুই দিয়া হরণ করিলে এক শতকে চারি দ্বারা বিভাগের তুল্য ফল প্রাপ্তি হয় কেননা উভয় পক্ষেই লব্ধি ২৫, একথা পূর্ব্বাপেক্ষা কিঞ্চিৎ কঠিন তথাপি অতি স্পষ্ট। তদ্রূপ ১০০০ তঙ্কাতে কত পয়সা অথবা একবৎসরে কত পল ইহাও গণিতের প্রশ্ন। এ বিদ্যার মূল অর্থাৎ সঙ্কলন ব্যবকলন হরণ পূরণের ধারা ক্রমে২ শিখিলে আমরা এবম্বিধ প্রশ্ন সাধিতে পারি—পদার্থ বিদ্যার মধ্যে গণিত প্রকরণ অতি সহজ হইলেও ইহার প্রয়োজন অতি ব্যাপক। কিন্তু ইহাতে কেবল দৃষ্ট অর্থাৎ বিশেষ২ বিদিত অঙ্কের গুণ জানা যায় এবং ইহার দ্বারা আমরা ঐ অঙ্কের যোগ বিয়োগ হরণ পূরণ করিতে সক্ষম হই, পরন্তু অদৃশ্য অর্থাৎ অনিশ্চিত ও অবিদিত অঙ্কের যোগ বিয়োগাদি করিতে যদি চাহি এবং তদ্বিষয়ক কোন সিদ্ধির নিমিত্তে অর্থাৎ তাহাদের নিরূপণ ও নির্ণয়ার্থে যদি দৃষ্ট ও বিদিত অঙ্কের ন্যায় তাহাদের সমস্ত ব্যাপারে নিযুক্ত হইতে ইচ্ছা করি—অথবা যদি অঙ্ক মাত্রের সাধারণ গুণ পরীক্ষা করিতে চাহি—তবে এই২ কার্য্য গণিতের বিশেষ প্রকরণ দ্বারা সাধিতে হইবে, তাহার নাম ব্যাপক গণিত অর্থাৎ

this must be performed by a peculiar kind of arithmetic, called *Universal* arithmetic, or *Algebra**. The common arithmetic, you will presently perceive, carries the seeds of this most important science in its bosom. Thus, suppose we inquire what is the number which multiplied by 5 makes 10? This is found if we divide 10 by 5—it is 2: but suppose that, before finding this number 2, and before knowing what it is, we would add it, whatever it may turn out, to some other number; this can only be done by putting some mark, such as a letter of the alphabet, to stand for the unknown number, and adding that letter as if it were a known number. Thus, suppose we want to find two numbers which, added together, make 9, and multiplied by one another, make 20. There are many which, added together, make 9; as 1 and 8; 2 and 7; 3 and 6; and so on. We have, therefore, occasion to use the second condition, that multiplied by one another they should make 20, and to work upon this condition before we have discovered the particular numbers. We must, therefore, suppose the numbers to be found, and put letters for them, and, by reasoning upon those letters, according to both the two conditions of adding and multiplying, we find what they must each of them be in figures, in order to fulfil or answer the conditions. Algebra teaches the rules for conducting this

* Algebra, from the Arabic words signifying the *reduction of fractions*; the Arabs having brought the knowledge of it into Europe.

বীজ গণিত, ইংরাজিতে ইহাকে আল্‌জিব্রা* কহে। কিঞ্চিৎ বিবেচনা করিলে বোধগম্য হইবে যে সামান্য গণিতের মধ্যেই এই ব্যাপক বিদ্যার বীজ আছে—যথা যদি জিজ্ঞাসা করা যায় কোন্‌ অঙ্ককে পাঁচ দিয়া গুণ করিলে দশ হয়? তবে দশকে পাঁচ দিয়া হরণ করিলে ইহার উত্তর পাওয়া যায় বটে অর্থাৎ ২—কিন্তু এই অঙ্ক (দুই) পাইবার পূর্ব্বে এবং ইহার নির্দ্দেশ হইবার অগ্রে ইহাকে যাবৎ তাবৎ জ্ঞান করিয়া যদি অন্য কোন অঙ্কেতে যোগ করিতে হয় তবে এ কার্য্য সাধিবার জন্য কোন অক্ষর কিম্বা চিহ্নকে ঐ অদৃশ্য অঙ্কের প্রতিনিধি স্বরূপ লিখিয়া দৃষ্ট অঙ্কের ন্যায় যোগ করিতে হইবে—তাহার উদাহরণ শুন—পরস্পর যোগ করিলে ৯ হয় এবং গুণ করিলে ২০ হয় এমত অঙ্ক দ্বয় কি? এ প্রশ্নে পরস্পর যোগ করিলে ৯ হয় এমত অনেক অঙ্কদ্বয় আছে যথা ১ এবং ৮, ২ এবং ৭, ৩ এবং ৬ ইত্যাদি অতএব পরস্পর গুণ করিলে যে ২০ হয় প্রশ্নের এই দ্বিতীয় কোটি অবলম্বন করিতে হইবে এবং এই কোট্যনুসারে গণনা না করিলে ইষ্ট অর্থাৎ জিজ্ঞাসিত অঙ্কদ্বয় পাওয়া যাইবে না—তন্নিমিত্তে এই অঙ্কদ্বয়কে প্রাপ্ত বোধ করিয়া তাহার পরিবর্ত্তে কোন অক্ষর লিখিতে হইবেক এবং পরস্পর যোগ ও গুণ এই কোটিদ্বয়ানুসারে ঐ অক্ষরদ্বয় লইয়া বিচার করিলে তাহারা কি২ অঙ্ক হইবে তাহা নিশ্চয় করা যায়, এই রূপ বিচার পূর্ব্বক ফল সাধনের বিহিত ধারা বীজ গণিতে ব্যক্ত হয়, এই বিদ্যাতে দৃষ্ট অঙ্কের সহিত অদৃশ্য অঙ্কের কোন প্রকার সম্বন্ধমাত্র

---

* আল্‌জিব্রা শব্দ আরবি ভাষা হইতে উৎপন্ন ইহার অর্থ ভিন্নাঙ্কের রূপান্তর—আরবি লোকেরা এ বিদ্যা ইউরোপে আনে।

reasoning, and obtaining this result successfully; and by means of it we are enabled to find out numbers which are unknown, and of which we only know that they stand in certain relations to known numbers, or to one another. The instance now taken is an easy one; and you could, by considering the question a little, answer it readily enough; that is, by trying different numbers, and seeing which suited the conditions; for you plainly see that 5 and 4 are the two numbers sought; but you see this by no certain or general rule applicable to all cases, and therefore you could never work more difficult questions in the same way; and even questions of a moderate degree of difficulty would take an endless number of trials or guesses to answer. Thus a shepherd sold his flock for 80*l.*; and if he had sold four sheep more for the same money, he would have received one pound less for each sheep. To find out from this, how many the flock consisted of, is a very easy question in algebra, but would require a vast many guesses, and a long time to hit upon by common arithmetic*: And questions infinitely more difficult can easily be solved by the rules of algebra. In like manner, by arithmetic you can tell the properties of particular numbers; as, for instance, that the number 348 is divided by 3 exactly, so as to leave nothing over: but algebra teaches us that it is only one of an infinite variety of numbers, all divisible by 3, and any one of which you can tell the moment you see it: for

* It is 16.

জানিয়াই অথবা কএক অদৃশ্য অঙ্কের পরস্পর সম্পর্ক বুঝিয়াই গণনা দ্বারা তাহাদের নির্ধারণ করা যায়। উপরি ভাগে যে উদাহরণ উদ্দিষ্ট হইয়াছে তাহা সহজ—কিঞ্চিৎ বিবেচনা করিলে এ প্রশ্নের সাধন অনায়াসে হইবে, কতিপয় অঙ্ক লইয়া প্রশ্নের কোটিদ্বয়ানুসারে পরীক্ষা করিলে অভীষ্ট অঙ্ক শীঘ্র জানা যাইবে অর্থাৎ এ স্থলে জিজ্ঞাসিত ৫ এবং ৪ অক্লেশে বোধ গম্য হইবে—কিন্তু এ জ্ঞান সামান্য এবং নিশ্চিত ও সর্ব্বত্র ব্যাপক সূত্রাধীন না হওয়াতে কোন কঠিনতর প্রশ্ন হইলে এ প্রকারে সাধা যায় না অত্যন্ত কঠিন প্রশ্ন না হইলেও অনুভব ও আশঙ্কা দ্বারা একে২ পরীক্ষা করিয়া উত্তর দিলে অসংখ্য পরীক্ষা ও কল্পনা করিতে হইবে তাহার এক উদাহরণ এই—কোন রাখাল এক পাল মেষ ৮০০ টাকায় বিক্রয় করিল যদি ঐ টাকায় আর চারিটা মেষ অধিক দিত তবে একে২ মেষের মূল্য ১০ টাকা করিয়া ন্যূন হইত ইহাতে তাহার পালের মেষ সংখ্যা কত*? বীজ গণিতে এ প্রশ্ন অতি সহজ কিন্তু সামান্য গণিতদ্বারা সাধিতে হইলে ইহার যথার্থ উত্তরের জন্য অনেকানেক কল্পনা ও পরীক্ষা করিতে হইবে যাহাতে অনেক কাল ব্যয়ের আবশ্যক পরন্তু বীজ গণিতে এতদপেক্ষা অসংখ্য প্রকারে কঠিনতর প্রশ্নও সহজে প্রতিপাদ্য হয়। সামান্য গণিত দ্বারা কোন২ বিশেষ অঙ্কের কার্য্য করা যায় বটে যথা ৩৪৮ ৩ দিয়া হৃত হইলে লব্ধি শুদ্ধ হয় কিছু অবশিষ্ট থাকে না কিন্তু বীজ গণিতে অবগতি হইবে যে ৩৪৮ ন্যায় অসংখ্য প্রকার অঙ্ক আছে সকলেই ৩ দ্বারা হৃত হইলে অবশিষ্ট কিছু থাকে না আর দর্শন মাত্রে সে প্রকার অঙ্কের পরিচয় হয় কেননা তাহার এক বিচিত্র লক্ষণ এই যে যে২ অক্ষরের পাতে

---

* উত্তর ১৬

they all have the remarkable property, that if you add together the figures they consist of, the sum total is divisible by 3. You can easily perceive this in any one case, as in the number mentioned, for 3 added to 4 and that to 8 make 15, which is plainly divisible by 3; and if you divide 348 by 3, you find the quotient to be 116, with nothing over. But this does not at all prove that any other number, the sum of whose figures is divisible by 3, will itself also be found divisible by 3, as 741; for you must actually perform the division here, and in every other case, before you can know that it leaves nothing over. Algebra, on the contrary, both enables you to discover such general properties, and to prove them in all their generality.

By means of this science, and its various applications, the most extraordinary calculations may be performed. We shall give, as an example, the method of *Logarithms*, which proceeds upon this principle. Take a set of numbers going on by equal differences; that is to say, the third being as much greater than the second, as the second is greater than the first, and the common difference being the number you begin with; thus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, and so on, in which the common difference is 1: then take another set of numbers, such that each is equal to twice or three times the one before it, or any number of times the one before it, but the common multiplier being the number you begin with: thus, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; write this second set of numbers under the first,

যে অঙ্ক লিখিত হয় তাহা একত্র যোগ করিলে ৩ দ্বারা নিরবশেষে ভাগ হইতে পারে, উদাহরণ দেখিলে এ লক্ষণ সহজে বোধগম্য হইবে যথা পূর্ব্বোক্ত ৩৪৮ ইহার তিন অক্ষর একত্র করিলে ৩, ৪, এবং ৮ যোগে ১৫ হয় ইহা ৩ দ্বারা শুদ্ধ রূপে ভাজ্য স্পষ্ট দেখা যাইতেছে এবং ৩৪৮ সংখ্যাও ৩ দ্বারা ভক্ত হইলে লব্ধি ১১৬, অবশিষ্ট কিছু থাকিবে না, কিন্তু কোন২ বিশেষ উদাহরণে উক্ত লক্ষণের সঙ্গতি দেখিয়া তাহাতেই সামান্য রূপে নির্ণয় করা যায় না যে যে২ অক্ষরের পাতে কোন সংখ্যা হয় তাহারা একত্র যোগে যদি ৩ দ্বারা নিরবশেষে ভাজ্য হয় তবে সে সংখ্যাও ৭৪১ ন্যায় ৩ দ্বারা শুদ্ধ ভাজ্য হইবে, কেননা ভাগ হার না করিলে নিশ্চয় হইতে পারেনা যে অবশিষ্ট কিছু নাই, কিন্তু বীজ গণিতের রীতি দ্বারা সাধন করিলে এই ২ সামান্য গুণ সপ্রমাণ উপপন্ন হইতে পারে।

এই বিদ্যার নানা প্রকার প্রয়োগ দ্বারা অতি আশ্চর্য্য২ গণনা হইতে পারে, লগারিথম নামক এক চমৎকার গণনা এই বিদ্যার সূত্রেতে সাধ্য হয়, তাহার উদাহরণ উল্লেখ করি—কএক সমানান্তর অঙ্ক শ্রেণী বদ্ধ করিয়া লিখ, অর্থাৎ কএক অঙ্ককে এমত করিয়া শ্রেণীবদ্ধ কর যে দ্বিতীয় অঙ্ক প্রথম হইতে যতোধিক অতিরিক্ত তৃতীয়ও যেন দ্বিতীয় হইতে ততোধিক অতিরিক্ত হয়—আর ইহাদের সামান্য অন্তর অর্থাৎ যে সংখ্যানুসারে প্রথম হইতে দ্বিতীয় ও দ্বিতীয় হইতে তৃতীয় অতিরিক্ত হইবে সেই সংখ্যক অঙ্ককে আদ্য অঙ্ক কর, যথা ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ইত্যাদি, ইহাদের সামান্য অন্তর ১। পরে আর কএক অঙ্কের এমত এক শ্রেণী ক্রমশঃ লিখ যে প্রত্যেক অঙ্ক যেন তাহার অব্যবহিত পূর্ব্ব অঙ্কের দ্বিগুণ অথবা ত্রিগুণ অথবা অন্য কোন সংখ্যক গুণ হয় আর এই সামান্য গুণকের সংখ্যা যেন আদ্য অঙ্ক হয় যথা ২, ৪, ৮, ১৬, ৩২, ৬৪, ১২৮

or side by side, so that the numbers shall stand opposite to one another, thus,

1	2	3	4	5	6	7
2	4	8	16	32	64	128

you will find, that if you add together any two of the upper or first set, and go to the number opposite their sum, in the lower or second set, you will have in this last set the number arising from multiplying together the numbers of the lower set corresponding or opposite to the numbers added together. Thus, add 2 to 4, you have 6 in the upper set, opposite to which in the lower set is 64, and multiplying the numbers 4 and 16 opposite to 2 and 4, the product is 64. In like manner, if you subtract one of the upper numbers from another, and opposite to their difference in the upper line, you look to the lower number, it is the quotient found from dividing one of the lower numbers by the other opposite the subtracted ones. Thus, take 4 from 6 and 2 remains, opposite to which you have in the lower line 4; and if you divide 64, the number opposite to 6, by 16, the number opposite to 4, the quotient is 4. The upper set, are called the *logarithms* of the lower set, which are called *natural numbers;* and tables may, with a little trouble, be constructed, giving the logarithms of all numbers from 1 to 10,000 and more: so that, instead of multiplying or dividing one number by another, you have only to add or subtract their logarithms, and then you at once find the product or the

ইত্যাদি। এই দ্বিতীয়োক্ত শ্রেণী প্রথমোক্তের নীচে অথবা পার্শ্বে লিখ যেন শ্রেণী মধ্যস্থ অঙ্ক সমূহ প্রত্যেকে পরস্পর সম্মুখস্থ হয় যথা

১	২	৩	৪	৫	৬	৭	
২	৪	৮	১৬	৩২	৬৪	১২৮	০

এক্ষণে যদি উপরিস্থ অর্থাৎ প্রথম শ্রেণীর কোন দুই অঙ্ককে একত্র যোগ কর অর্থাৎ ঠিক দেও আর এই ঠিক দিয়া যত পাও সেই অঙ্কের তলে যে অঙ্ক আছে তাহাতে যদি নিরীক্ষণ কর তবে দেখিবা যে প্রথম শ্রেণীর যে দুই অঙ্ক ঠিক দিয়াছ তাহাদের তলস্থ দ্বিতীয় শ্রেণীর দুই অঙ্ককে পরস্পর গুণ করিলে ঐ নিরীক্ষিত অঙ্ক ফল পাইবা—যথা প্রথম শ্রেণীর মধ্যে যদি ২ এবং ৪ একত্র ঠিক দেও তবে ৬ পাইবা এই অঙ্কের তলে অথবা সম্মুখে দ্বিতীয় শ্রেণীতে ৬৪ আছে আর যে দুই অঙ্ক ঠিক দিলা (অর্থাৎ ২ এবং ৪) তাহাদের তলস্থ অথবা সম্মুখস্থ দ্বিতীয় শ্রেণীর অঙ্ক দ্বয় ৪ এবং ১৬ দেখিবা, এই দুই অঙ্ককে পরস্পর গুণ করিলে ৬৪ ফল পাইবা। তদ্রূপ যদি প্রথম শ্রেণীর কোন অঙ্ক অন্য অঙ্ক হইতে ব্যবকলন কর অর্থাৎ বাকি কাট এবং তাহাতে অবশিষ্ট যাহা পাইবা তাহার তলস্থ বা সম্মুখস্থ দ্বিতীয় শ্রেণীর অঙ্কে যদি দৃষ্টি কর তবে দেখিবা যে বাকি কাটিবার উক্ত দুই অঙ্কের তলস্থ অঙ্ক দ্বয়ের একটিকে অন্য দ্বারা ভাগ করিলে ঐ দ্বিতীয় শ্রেণীর দৃষ্ট অঙ্ক লব্ধি হয় যথা, যদি ৬ হইতে ৪ বাকি কাট তবে অবশিষ্ট ২ থাকিবে ইহার তলে দ্বিতীয় শ্রেণীতে ৪ দেখিবা অতএব ৬ সম্মুখস্থ অঙ্ক অর্থাৎ ৬৪ ইহাকে যদি ৪ সম্মুখস্থ অঙ্ক অর্থাৎ ১৬ দ্বারা ভাগ কর তবে ৪ লব্ধি পাইবা, এই প্রকারে প্রথম শ্রেণীস্থ অঙ্ককে দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ অঙ্কের লগারিথম বলা যায় এবং দ্বিতীয় শ্রেণীকে স্বাভাবিক অঙ্ক কহা যায়। আর কিঞ্চিৎ পরিশ্রম করিলে ১ অবধি ১০১০০ অথবা তাহার অধিক পর্য্যন্ত সকল অঙ্কের লগারিথম এই রূপে গণনা করিয়া শ্রেণী বন্ধন পূর্ব্বক লেখা যাইতে পারে অতএব যখন কোন২ অঙ্কের

quotient in the tables. These are made applicable to numbers far higher than any actually in them, by a very simple process; so that you may at once perceive the prodigious saving of time and labour which is thus made. If you had, for instance, to multiply 7,543,283 by itself, and that product again by the original number, you would have to multiply a number of 7 places of figures by an equally large number, and then a number of 14 places of figures by one of 7 places till at last you had a product of 21 places of figures—a very tedious operation; but, working by logarithms, you would only have to take three times the logarithm of the original number, and that gives the logarithm of the last product of 21 places of figures, without any further multiplication. So much for the time and trouble saved, which is still greater in questions of division; but by means of logarithms many questions can be worked, and of the most important kind, which no time or labour would otherwise enable us to resolve.

Geometry teaches the properties of figure, or particular portions of space, and distances of points from each other. Thus, when you see a triangle, or three-sided figure, one of whose sides is perpendicular to another side, you find, by means of geometrical reasoning respecting this kind of triangle, that if squares be drawn on its three sides, the large square upon the slanting side, opposite the two perpendiculars, is exactly equal to the two smaller squares upon the perpendiculars, taken together; and this is absolutely

হরণ পূরণ করিতে হয় তখন বহু পরিশ্রম পূর্ব্বক তাহা না করিয়া যদি ঐ শ্রেণীতে তাহাদের লগারিথম দৃষ্টি করিয়া ঠিক দেও কিম্বা বাকি কাট তবে তাহাদের যোগ বিয়োগে যাহা পাও তাহার সম্মুখস্থ পংক্তি দৃষ্টি করিলে একেবারে উদ্দিষ্ট ফল বা লব্ধি পাইবা—ঐ প্রকার শ্রেণীতে যে২ অঙ্ক আছে তাহার অত্যূর্দ্ধ সংখ্যা পর্য্যন্তেও সহজে এ সঙ্কেতের প্রয়োগ হইতে পারে—অতএব ইহাতে কিপর্য্যন্ত পরিশ্রম ও কাল ব্যয়ের লাঘব হয় তাহা বিবেচনা করিলেই বুঝিবা—তাহার সাক্ষি দেখ যদি ৭৫৪৩২৮৩ এমত এক অঙ্ককে ইহার আপ-নার দ্বারা গুণ করিতে হয় এবং প্রাপ্ত ফলকেও ঐ আদ্য অঙ্ক দ্বারা পুনশ্চ যদি গুণ করিতে হয় তবে প্রথমতঃ ৭অক্ষরের এক অঙ্ককে তৎস্বরূপ অঙ্কদ্বারা গুণ করিতে হইবে পরে ইহার ফলকে অর্থাৎ ১৪ অক্ষরের এক অঙ্ককে পুনশ্চ ৭ অক্ষরের এক অঙ্কদ্বারা গুণ করিতে হইবে অবশেষে ২১ অক্ষরের এক অঙ্ক ফল পাইবা—এই রূপ গুণ কর্ম্মেতে কেমত ক্লেশ ও পরি-শ্রম তাহা বিবেচনা করিয়া দেখ—কিন্তু লগারিথম নামক গণনা দ্বারা প্রথম অঙ্কের লগারিথম লইয়া তিন গুণ করিলে ঐ ২১ অক্ষর যুক্ত ফলের লগারিথম একেবারে পাইবা তাহাতে আর গুণ করিতে হইবে না—দেখ ইহাতে কত পরিশ্রম ও কাল ব্যয় হইতে রক্ষা পাইবা—ভাগহারে এই রক্ষা আরো অধিক জানিবা।—লগারিথম দ্বারা এতদ্ব্যতীত আরো অনেক গুরুতর প্রশ্ন সাধা যায় তাহা অন্য কোন প্রকারে বহু পরিশ্রম ও কালক্ষেপ করিলেও কখনও সাধ্য হয় না।

গণিত শাস্ত্রের আর এক শাখার নাম ক্ষেত্রতত্ত্ব ইহাতে ক্ষেত্রের অর্থাৎ দিগ্‌দেশীয় রাশির নানা গুণ ও ধর্ম্ম জানা যায় এবং এক বিন্দুর অন্য বিন্দু হইতে যে দূরতা তাহাও নির্ণয় হয় যথা যদি এমত এক ত্রিভুজ অর্থাৎ ত্রিকোণ ক্ষেত্র দেখ যাহার কোন দুই বাহু পরস্পর ঠিক লম্বভাবে থাকে তবে এ প্রকার ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় ক্ষেত্র ব্যবহারে নির্ণয় করিতে পারিবা

true, whatever be the size of the triangle, or the proportions of its sides to each other. Therefore, you can always find the length of any one of the three sides by knowing the lengths of the other two. Suppose one perpendicular side to be 3 feet long, the other 4, and you want to know the length of the third side opposite to the perpendicular; you have only to find a number such, that if, multiplied by itself, it shall be equal to 3 times 3, together with 4 times 4, that is 25*. (This number is 5.)

Now only observe the great advantage of knowing this property of the triangle, or of perpendicular lines. If you want to measure a line passing over ground which you cannot reach—to know, for instance, the length of one side covered with water of a field, or the distance of one point on a lake or bay from another point on the opposite side—you can easily find it by measuring two lines perpendicular to one another on the dry land, and running through the two points; for the line wished to be measured, and which runs through the water, is the third side of a perpendicular-sided triangle, the other two sides of which are ascertained. But there are other properties of triangles,

---

* It is a property of numbers, that every number whatever, whose last place is either 5 or 0, is, when multiplied into itself, equal to two others which are square numbers, and divisible by 3 and 4 respectively:—thus, $45 \times 45 = 2025 = 729 + 1296$, the squares of 27 and 36; and $60 \times 60 = 3600 = 1296 + 2304$, the squares of 36 and 48.

যে যদি তাহার তিন বাহুর উপর সম চতুর্ভুজ আঁকা যায় তবে লম্ব দ্বয়ের উপরিস্থ ক্ষুদ্র সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগ করিলে সম্মুখবর্ত্তি কর্ণস্বরূপ বাহুর উপরিস্থ বৃহৎ সম চতুর্ভুজের তুল্য হইবে এবং ঐ ত্রিভুজ যত বৃহৎ হউক এবং ইহার বাহুত্রয়ের মধ্যে যে প্রকার তারতম্য থাকুক ঐ রূপ তুল্যতায় কখন ব্যাঘাত হইবে না অতএব এবম্ভূত ত্রিভুজের দুই বাহুর দীর্ঘতা জানিলে অবশিষ্ট বাহুর দীর্ঘতা সহজে নির্ণয় হইতে পারে, যদিস্যাৎ এক লম্ব ৩ হাত অন্য লম্ব ৪ হাত দীর্ঘ হয় তবে তাহার সম্মুখস্থ তৃতীয় বাহুর দীর্ঘতা জানিতে হইলে কেবল এমত এক অঙ্ক স্থির করিতে হইবে যাহা আপনারদ্বারা গুণ হইলে তিন ত্রিত্বে ৯ ও চতুশ্চতুর্গুণে ১৬ এ উভয়ের যোগ তুল্য হইবে—অর্থাৎ কেবল এমত এক অঙ্ক অভীষ্ট যাহাকে আপনাআপনি গুণ করিলে ২৫* হইবে. (ঐ অঙ্ক ৫)।

ত্রিভুজের কিম্বা লম্ব রেখার এই গুণ জানাতেই কেমত উপকার তাহা বিবেচনা কর, যদি অগম্য ক্ষেত্রের উপর কল্পিত কোন রেখার পরিমাণ জানিতে চাহ—অর্থাৎ যদি কোন ক্ষেত্রের এক পার্শ্ব জলেতে মগ্ন হইলে তাহার দৈর্ঘ্য জানিতে বাঞ্ছা কর কিম্বা কোন হ্রদের এক কূলস্থ বিন্দু হইতে অপর কূলস্থ কোন বিন্দুর দূরত্বা জানিতে স্পৃহা কর তবে পরস্পর লম্বভাবে থাকে এমত দুই রেখা ঐ বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া শুষ্ক ভূমির উপর টানিয়া পরিমাণ করিলে জানিতে পারিবা কেননা যে রেখার

---

* অঙ্কের আর এক গুণ এই যে যত সংখ্যক অঙ্ক হউক শেষাঙ্কর যদি ৫ কিম্বা ০ হয় তবে আপনার দ্বারা গুণ হইলে দুই বর্গাঙ্কের যোগতুল্য হয় এবং সে বর্গদ্বয় ক্রমশঃ ৩ এবং ৪ দ্বারা ভাজ্য যথা ৪৫×৪৫=২০২৫=৭২৯+১২৯৬ ইহারা ২৭ এবং ৩৬ বর্গ। পুনশ্চ ৬০×৬০=৩৬০০=১২৯৬+২৩০৪ ইহারা ৩৬এবং ৪৮ বর্গ।

which enable us to know the length of two sides of any triangle, whether it has perpendicular sides or not, by measuring one side, and also measuring the inclinations of the other two sides to this side, or what is called the two *angles* made by those sides with the measured side. Therefore you can easily find the perpendicular line drawn, or supposed to be drawn, from the top of a mountain through it to the bottom, that is the height of the mountain; for you can measure a line on level ground, and also the inclination of two lines, supposing them drawn in the air, and reaching from the two ends of the measured line to the mountain's top; and having thus found the length of the one of those lines next the mountain, and its inclination to the ground, you can at once find the perpendicular, though you cannot possibly get near it. In the same way, by measuring lines and angles on the ground, and near, you can find the length of lines at a great distance, and which you cannot approach: for instance, the length and breadth of a field on the opposite side of a lake or sea: the distance of two islands, or the space between the tops of two mountains.

Again, there are *curve-lined* figures as well as straight, and geometry teaches the properties of these also. The best known of all the curves is the *circle*, or a figure made by drawing a string round one end which is fixed, and marking where its other end traces, so that every part of the circle is equally distant from the fixed point or centre. From this fundamental property, an infinite variety of others follow by steps

পরিমাণ অভীষ্ট তাহা এই রূপে এক জাত্য অর্থাৎ সমকোণি ত্রিভুজের কর্ণ হইবে সুতরাং দুই বাহু অর্থাৎ ভুজকোটি নিশ্চয় হইলে তৃতীয় বাহু সহজে নিশ্চয় হইবে। অধিকন্তু ত্রিভুজ ক্ষেত্রের অন্যান্য গুণ আছে যদ্দ্বারা জাত্য না হইলেও এক বাহুর দৈর্ঘ্য নিশ্চয় করিয়া এবং তাঁহার সহিত অন্য বাহুদ্বয়ের সংযোগে উৎপন্ন কোণ দ্বয়ের পরিমাণ স্থির করিয়া ঐ বাহু দ্বয়ের পরিমাণ গণনা করা যায়, এই প্রকারে কোন পর্ব্বতের শিখর হইতে তল পর্য্যন্ত লম্ব কল্পনা করিলে তাহার পরিমাণ অর্থাৎ ঐ পর্ব্বতের উন্নতি নির্ণয় করা যায় কেননা পর্ব্বতের নিকটে কিম্বা দূরে সরল ভূমির উপর স্বেচ্ছানুসারে এক রেখা নির্দ্দেশ করিয়া তাহার পরিমাণ করিতে পার এবং এই রেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হইতে শূন্য দিয়া পর্ব্বতের শিখর পর্য্যন্ত দুই রেখা কল্পনা করিলে যে কোণ দ্বয় উৎপন্ন হইবে তাহারও পরিমাণ যন্ত্র দ্বারা নির্ণয় হইতে পারে—তাহাতে ঐ কল্পিত রেখা দ্বয়ের মধ্যে পর্ব্বতের নিকটতর রেখার পরিমাণ প্রথমতঃ নিশ্চিত হইলে এবং ভূমির উপর তৎসংযোগোৎপন্ন কোণের নির্ণয় হইলে পরে পর্ব্বতের শিখর হইতে তল পর্য্যন্ত লম্বের দৈর্ঘ্য স্থির হইবে এবং পর্ব্বত অগম্য হইলেও এই রূপে তাহার উন্নতি গণনা হইতে পারে। এই প্রকারে ভূমির উপর দৃষ্ট রেখা ও কোণের পরিমাণ করিয়া দূরস্থ অদৃষ্ট এবং অগম্য রেখার পরিমাণ গণনা করা যায়, তাহার উদাহরণ—হ্রদের কিম্বা সমুদ্রের পারস্থ ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও বিস্তার এবং দুই উপ-দ্বীপের পরস্পর দূরতা অথবা দুই পর্ব্বত শিখরের মধ্যস্থ ভূমি পরিমাণ সকলি এই রূপে জানা যায়।

অপিচ যাদৃশ সরল রেখার লক্ষণ, আছে তাদৃশ কুটিল রেখারও সূত্র আছে এবং ক্ষেত্র বিদ্যাতে ইহার গুণও প্রকাশ করে। বক্রাকৃতি রেখার মধ্যে বৃত্ত সর্ব্বতোভাবে প্রসিদ্ধ, সূত্র লইয়া একাগ্র স্থির রাখিয়া অন্য অগ্র ঘুরাইলে চিহ্নিত স্থলে বৃত্ত রেখা জন্মে এবং এই রেখার সর্ব্বাংশ ঐ স্থির অর্থাৎ মধ্য বিন্দু হইতে সমদূর। বৃত্তের এই মূল লক্ষণ হইতে নানা

of reasoning more or less numerous, but all necessarily arising one out of another. To give an instance; it is proved by geometrical reasoning, that if from the two ends of any diameter of the circle you draw two lines to meet in any one point of the circle whatever, these lines are perpendicular to each other.

Another property, and a most useful one, is, that the sizes, or areas, of all circles whatever, from the greatest to the smallest, from the sun to a watch-dial-plate, are in exact proportion to the squares of their instances from the centre—that is, the squares of the strings they are drawn with; so that if you draw a circle with a string 5 feet long, and another with a string 10 feet long, the large circle is four times the size of the small one, as far as the space or area inclosed is concerned; the square of 10 or 100 being four times the square of 5 or 25. But it is also true, that the lengths of the circumferences themselves, the number of feet over which the ends of the strings move, are in proportion to the lengths of the strings; so that the curve of the larger circle is only twice the length of the curve of the lesser.

But the circle is only one of an infinite variety of curves, all having a regular formation and fixed properties. The *oval* or *ellipse* is, perhaps, next to the circle, the most familiar to us, although we more frequently see another curve, the line formed by the motion of bodies thrown forward. When you drop a stone, or throw it straight up, it goes in a straight line; when you throw it forward, it goes in a curve

প্রকার ন্যায় দ্বারা অসংখ্য গুণ সিদ্ধ হয় যে সমস্ত গুণ পরস্পর হেতু সাধ্য ভাবে থাকে, তাহার এক উদাহরণ শুন—যদি কোন বৃত্তের অন্তরে ব্যাসের দুই প্রান্ত দিয়া দুই রেখা পরিধির কোন বিন্দুতে সংলগ্ন করা যায় তবে সে দুই রেখা পরস্পর লম্বভাবে থাকিবে ইহা ক্ষেত্র বিদ্যার ন্যায়েতে সিদ্ধ হইয়াছে।

বৃত্তের আর এক ধর্ম্ম এই যে অতি বৃহৎ হউক কিম্বা অতি ক্ষুদ্র হউক প্রকাণ্ড সূর্য্য মণ্ডল স্বরূপ হউক কিম্বা এক সামান্য ঘটিকা চক্র স্বরূপ হউক পরস্পর তুলনা করিতে হইলে আপন২ ব্যাসার্দ্ধের বর্গানুসারে অন্তরস্থ ক্ষেত্র ফলের নিষ্পত্তি হইবে অর্থাৎ যে২ সূত্র ঘুরাইয়া বৃত্ত অঙ্কিত হইয়াছে তত্তৎ বর্গের নিষ্পত্তির ন্যায় অন্তর ক্ষেত্রফলের নিষ্পত্তি জানিবা। অতএব যদি একটা বৃত্ত ৫ ফুট সূত্র দিয়া আর একটা ১০ ফুট দিয়া আঁকা যায় তবে বৃহৎ বৃত্তের ক্ষেত্র ফল ক্ষুদ্রের চারি গুণ অধিক হইবে কেননা দশের বর্গ ১০০ পঞ্চের বর্গ ২৫ হইতে চারি গুণ অতিরিক্ত কিন্তু দুই বৃত্তের পরিধি কেবল সূত্রানুসারে পরস্পর নিষ্পন্ন হইবে অতএব এস্থলে বৃহৎ বৃত্তের পরিধি ক্ষুদ্র বৃত্তের দ্বিগুণ হইবে কেননা ১০ ফুট সূত্র ৫ ফুট সূত্রের দ্বিগুণ।

বৃত্তের ন্যায় অন্যান্য অনেক বক্র রেখা আছে তাহাদেরও লক্ষণ আকৃতি এবং গুণ নিয়মিত হইয়াছে। বৃত্তাভাস অর্থাৎ অণ্ডাকৃতি রেখা বৃত্তের পর সর্ব্বাপেক্ষা প্রসিদ্ধ কিন্তু আমরা মুহুর্মুহুঃ আর এক বক্র রেখা দেখিয়া থাকি তাহা নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি দ্বারা উৎপন্ন হয়,—যদি কোন প্রস্তর হাত হইতে অবক্ষিপ্ত কিম্বা ঊর্দ্ধে ঋজুভাবে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে সরল রেখার

line till it reaches the ground; as you may see by the figure in which water runs when forced out of a pump, or from a fire-pipe, or from the spout of a kettle or tea-pot. The line it moves in is called a *parabola;* every point of which bears a certain fixed relation to a certain point within it, as the circle does to its centre. Geometry teaches various properties of this curve: for example, if the direction in which the stone is thrown, or the bullet fired, or the water spouted, be half the perpendicular to the ground, that is, half way between being level with the ground and being upright, the curve will come to the ground at a greater distance than if any other direction whatever were given, with the same force. So that to make the gun carry farthest, or the fire-pipe play to the greatest distance, they must be pointed, not, as you might suppose, level or point blank, but about half way between that direction and the perpendicular. If the air did not resist, and so somewhat disturb the calculation, the direction to give the longest range ought to be exactly half perpendicular,

The *oval* or *ellipse,* is drawn by taking a string of any certain length, and fixing, not one end as in drawing the circle, but both ends to different points, and then carrying a point round inside the string, always keeping it stretched as far as possible. It is plain, that this figure is as regularly drawn as the circle, though it is very different from it; and you perceive that every point of its curve must be so placed, that the straight lines, drawn from it to the two points where the string

ন্যায় গগন করে কিন্তু যদি সম্মুখে নিক্ষিপ্ত হয় তবে বক্র রেখার স্বরূপ যাইয়া পরে ভূমিতে পড়ে, তাহার উদাহরণ— কোন পিছকিরি কিম্বা দমকল অথবা গাড়ুর মুখ হইতে জল যে রূপে নিক্ষিপ্ত হয় তাহা এই রেখার আকৃতি, এ রেখার নাম পেরাবলা অর্থাৎ ক্ষেপণীরেখা, বৃত্তের যেমত কেন্দ্রের সহিত সম্বন্ধ তদ্রূপ এ রেখার সর্ব্বাংশে অন্তরস্থ এক বিন্দুর সহিত বিশেষ সম্বন্ধ আছে, ক্ষেত্র বিদ্যাতে এ রেখার অনেক গুণ জানা যায়। তাহার দৃষ্টান্ত। ভূমির উপর অর্দ্ধ লম্ব ভাবে অর্থাৎ সরল এবং ঊর্দ্ধ লম্ব ইহাদের মধ্যস্থল দিয়া কোন প্রস্তর অথবা গুলি কিম্বা জল প্রক্ষেপ করিলে সর্ব্বতোভাবে অধিক দূরে পড়িবে ইহা ক্ষেত্র বিদ্যাতে জানা যায়, অন্য কোন দিকে ইহার তুল্য শক্তিতে নিক্ষেপ করিলে তাদৃক্ দূরে যাইবে না অতএব তোপের গুলি কিম্বা দমকলের জল অতি দূরে নিক্ষেপ করিতে হইলে সাধারণ লোকের অনুভবানুসারে ঠিক সমান ভাবে লক্ষ্য করিয়া ত্যাগ করিতে হয় না কিন্তু সরল ভূমি ও ঊর্দ্ধ লম্ব ইহাদের মধ্যস্থল দিয়া নিক্ষেপ করিতে হয় বায়ুর ব্যাঘাতে গণনার ব্যভিচার না জন্মিলে ঠিক মধ্য দিক দিয়া নিক্ষেপ করিলে সর্ব্বতোভাবে অধিক দূরে যাইবে।

বৃত্তাভাস অর্থাৎ অণ্ডাকৃতি রেখা টানিবার ধারা এই, এক সূত্র লইয়া বৃত্ত অঙ্কনের ন্যায় কেবল একাগ্র স্থির না করিয়া উভয় প্রান্ত দুই বিন্দুতে স্থির কর, পরে সূত্রের মধ্যে এক লেখনী দিয়া টান্ রাখিয়া রেখার অঙ্ক কর, তাহাতে যে আকৃতি উৎপন্ন হইবে সেই বৃত্তাভাস এবং তাহা বৃত্তের ন্যায় নিয়মানুসারে অঙ্কিত হয় কিন্তু বৃত্তের সহিত ইহার অনেক বৈলক্ষণ্য আছে। বিবেচনা করিয়া দেখ এ রেখার সর্ব্বাংশ এমত প্রকারে স্থাপিত যে তাহার যেখান হইতে সূত্রের দুই অগ্রস্থ বিন্দু দ্বয় পর্য্যন্ত যত সরল রেখাদ্বয় টানিবা সে সকলের যোগ

was fixed, are, when added together, always the same; for they make together the length of the string.

Among various properties belonging to this curve, in relation to the straight lines drawn within it, is one which gives rise to the construction of the *trammels*, or elliptic compasses, used for making figures and ornaments of this form; and also to the construction of lathes for turning oval frames, and the like.

If you wish at once to see these three curves, take a pointed sugar-loaf, and cut it any where clean through in a direction parallel to its base or bottom; the outline or edge of the loaf where it is cut will be a *circle*. If the cut is made so as to slant, and not be parallel to the base of the loaf, the outline is an *ellipse*, provided that the cut goes quite through the sides of the loaf all round, or is in such a direction that it would pass through the sides of the loaf were they extended; but if it goes slanting and parallel to the line of the loaf's side, the outline is a *parabola*; and if you cut in any direction, not through the sides all round, but through the sides and base, and not parallel to the line of the side, being nearer the perpendicular, the outline will be another curve, of which we have not yet spoken, but which is called an *hyperbola*. You will see another instance of it, if you take two plates of glass, and lay them on one another; then put their edge in water, holding them upright and pressing them together; the water, which, to make it more plain, you may colour with a few drops of ink or strong tea, rises to a certain height, and its outline is this curve;

সমান হইবে কেননা এমত প্রত্যেক রেখাদ্বয়ের যোগে সূত্র পরিমাণ হইবে।

এই বক্র রেখার অন্তরস্থ সরল রেখা সম্বন্ধীয় যে২ গুণ আছে তন্মধ্যে একটা অতি প্রসিদ্ধ, তদ্দ্বারা অণ্ডাকার মূর্ত্তি ও অলঙ্কার করিবার কোম্পাস প্রস্তুত হয় এবং তাহাতে অণ্ডাকার কাষ্ঠাদি কাটিবার কুঁদ হয়।

এই২ বক্র রেখার উৎপত্তি যদি এক দৃষ্টিতে দেখিতে চাহ তবে অধিবাসের স্বস্তিক অর্থাৎ আগ নামক দ্রব্য গ্রহণ করিয়া কোন স্থানে তাহার তলের সমানান্তরাল দিকে সম্পূর্ণ ছেদ কর তাহাতে ঐ ছিন্ন আগের ধার বৃত্তাকৃতি হইবে যদি তলের সমানান্তরাল দিকে না কাটিয়া কিঞ্চিৎ বক্র করিয়া ছেদ কর তবে আগের সমস্ত পার্শ্ব ব্যাপিয়া ছেদ করিলে তাহাতে বৃত্তাভাস অর্থাৎ অণ্ডাকৃতি রেখা উৎপন্ন হইবে কিন্তু যদি পার্শ্বের সমানান্তরাল ভাবে ছেদ কর তবে তাহাতে পেরাবলা অর্থাৎ ক্ষেপণী রেখা জন্মিবে অপর সকল পার্শ্ব না ব্যাপিয়া কেবল কিয়দংশ তল পর্য্যন্ত যদি ছেদ কর তাহাতে ছেদন যদি লম্বের নিকটতর হইয়া পার্শ্বের সমানান্তরাল না হয় তবে আর এক বক্র রেখার উৎপত্তি হইবে তাহার বর্ণনা এখনও হয় নাই তাহার নাম হাইপর্বলা। ইহার আর এক উদাহরণ এই যথা যদি দুই কাচের থাল একত্র দৃঢ় রূপে লম্বভাবে ধরিয়া জলের উপর রাখ এবং রেখা স্পষ্ট করিবার নিমিত্তে কিঞ্চিৎ মসী দিয়া ঐ জল কৃষ্ণবর্ণ কর তবে দেখিবা যে ঐ কাচদ্বয়ের মধ্যে জল কিয়দ্দূর পর্য্যন্ত উঠিবে এবং উঠিয়া যে আকার ধারণ করিবে তাহা এই বক্র রেখাস্বরূপ, এই রেখা যদিও বৃত্ত ও

which, however much it may seem to differ in form from a circle or ellipse, is found by mathematicians to resemble them very closely in many of its most remarkable properties.

These are the curve lines best known and most frequently discussed; but there are an infinite number of others all related to straight lines and other curve lines by certain fixed rules: for example, the course which any point in the circumference of a circle, as a nail in the felly of a wheel rolling along, takes through the air, is a curve called the *cycloid*, which has many remarkable properties; and among others, this, that it is, of all lines possible, the one in which any body, not falling perpendicularly, will descend from one point to another the most quickly. Another curve often seen is that in which a rope or chain hangs when supported at both ends: it is called the *Catenary*, from the Latin for chain; and in this form some arches are built. The form of a sail filled with the wind is the same curve.

ALGEBRA.—*To define and explain Algebraical Signs.*—ART. 1. THE method of representing the relation of abstract quantities by letters and characters, which are made the signs of such quantities and their relations, is called ALGEBRA.

Known or determined quantities are usually represented by the first letters of the alphabet, a, b, c, d, &c. and unknown or undetermined quantities by the last y, x, w, &c.

বৃত্তাভাস হইতে ভিন্ন বোধ হয় তথাপি ম্যাথেমেটিক বিদ্যাতে পারদর্শি পণ্ডিতেরা নির্ণয় করিয়াছেন যে এ রেখা বৃত্ত ও বৃত্তাভাসের সহিত অনেক আশ্চর্য্য বিষয়ে তুল্য।

এই২ বক্র রেখা অতি প্রসিদ্ধ ও সর্ব্বদা বর্ণিত হইয়া থাকে, কিন্তু এতদ্ভিন্ন অন্যান্য অনেক বক্র রেখা আছে যাহার সহিত সরল রেখার ও অপর কুটিল রেখার নিয়মিত রূপে বহু সম্বন্ধ আছে তাহার উদাহরণ—গমনশীল চক্র নেমির মধ্যস্থ প্রেকের ন্যায় কোন জঙ্গম বৃত্ত পরিধিস্থ বিন্দু ভ্রমণ করত শূন্যে যে রেখা অঙ্কিত করে তাহাকে সাইক্লৈড অর্থাৎ স্যন্দন রেখা কহে ইহার অনেক আশ্চর্য্য গুণ আছে তাহার মধ্যে এক গুণ এই যে কোন পতনশীল বস্তু ঋজুভাব বর্জ্জিয়া এই রেখার ন্যায় অবক্ষিপ্ত হইলে সর্ব্বাপেক্ষা শীঘ্র পতিত হয়। অন্য এক বক্র রেখা এই যাহা কোন রজ্জু কিম্বা শৃঙ্খল দুই প্রান্তভাগে বদ্ধ থাকিয়া ঝুলিলে উৎপন্ন হয় ইহাকে কেটিনেরি অর্থাৎ শৃঙ্খল রেখা কহে, কোন২ খিলানের নির্ম্মাণ এই রেখার ধারাতে হয় নৌকার পালি বায়ুতে স্ফীত হইলেও এই রেখা স্বরূপ হয়।

বীজ গণিত।—অথ বীজ গণিতের চিহ্ন নিরূপণ। ১। কোন২ অক্ষর এবং অঙ্ককে সামান্য রাশির স্বরূপ কল্পনা করিয়া তদ্দ্বারা ঐ রাশির সম্বন্ধ প্রকাশ করিবার ধারাকে বীজ গণিত কহা যায়।

দৃষ্ট অর্থাৎ নিশ্চিত রাশি এস্থলে হলবর্ণে উক্ত হইবে যথা ক খ গ ঘ ইত্যাদি, অদৃশ্য অর্থাৎ অনিশ্চিত রাশি স্বর বর্ণে উক্ত হইবে—যথা অ ই উ ইত্যাদি।

The following signs are made use of to express the relations which the quantities bear to each other:

2. $+$ *Plus*, signifies that the quantity to which it is prefixed must be added. Thus $a + b$ signifies that the quantity represented by b is to be added to the quantity represented by a; if a represent 5, and b, 7, then $a + b$ represents 12.

If no sign be placed before a quantity, the sign $+$ is understood. Thus a signifies $+ a$.

3. $-$ *Minus*, signifies that the quantity to which it is prefixed must be subtracted. Thus $a - b$ signifies that b must be taken from a; if a be 7, and b, 5, $a - b$ expresses 7 diminished by 5, or 2.

4. $\times$ *Into*, signifies that the quantities between which it stands are to be multiplied together. Thus $a \times b$ signifies that the quantity represented by a is to be multiplied by the quantity represented by b, if a represent 5, and b 6, then $a \times b$ is 5×6 and amounts to 30.

This sign is frequently omitted; thus abc signifies $a \times b \times c$, or a full point is used instead of it; thus $1 \times 2 \times 3$, and $1 . 2 . 3$ signify the same thing.

5. If in multiplication the same quantity be repeated any number of times, the product is usually expressed by placing above the quantity the number which represents how often it is repeated; thus a, $a \times a$, $a \times a \times a$, $a \times a \times a \times a$, and a^1, a^2, a^3, a^4, have respectively the same signification. These quantities are called *powers*; thus a^1, is called the *first power*

বিবিধ রাশির মধ্যে পরস্পর যে সম্বন্ধ থাকে তাহা সামান্য রীত্যনুসারে পশ্চাৎ লিখিত চিহ্ন দ্বারা উক্ত হয়।

২। + ইহার নাম ধন। এ চিহ্ন যে রাশির পূর্ব্বে থাকিবে তাহাকে অন্য কোন রাশির সহিত যোগ করিতে হইবে যথা ক + খ ইহার অর্থ এই যে খ লক্ষিত রাশি ক লক্ষিত রাশির সহিত যোগ হইবে, ক যদি ৫ ও খ যদি ৭ হয় তবে ক + খ ১২ হইবে।

যে রাশির পূর্ব্বে কোন চিহ্ন থাকিবে না সেখানে + অর্থাৎ ঠিক দিবার চিহ্ন উহ্য করিতে হইবে।

৩। — ইহার নাম ঋণ। এ চিহ্ন যে রাশির পূর্ব্বে থাকিবে তাহাকে অন্য কোন রাশি হইতে ব্যবকলন করিতে অর্থাৎ বাকি কাটিতে হইবে যথা ক — খ এস্থলে ক লক্ষিত রাশি হইতে খ লক্ষিত রাশিকে বাকি কাটিতে হইবে। যদি ক ৭ ও খ ৫ হয় তবে ক—খ ২ হইবে অর্থাৎ ৭ হইতে ৫ বাকি কাটিলে যাহা থাকে তাহা হইবে।

৪। × ইহার নাম গুণ। যে২ রাশির মধ্যে এ চিহ্ন থাকিবেক তাহাদের পরস্পর গুণ করিতে হইবে যথা ক × খ ইহার অর্থ এই যে ক লক্ষিত রাশি খ লক্ষিত রাশির দ্বারা গুণিত হইবে, যদি ক ৫ এবং খ ৬ হয় তবে ক × খ অর্থাৎ ৫ × ৬ গুণ দ্বারা ৩০ হইবে।

এই গুণ চিহ্ন কখন২ উক্ত থাকে না উহ্য করিতে হয় যথা কখগ একত্র থাকিলে ক × খ × গ বুঝায়—আর কখন এ চিহ্নের পরিবর্ত্তে এক বিন্দু মাত্র লেখা যায় যথা ১.২.৩ ইহার অর্থ ১ × ২ × ৩।

৫। গুণ করণে যদি এক রাশি অনেক বার উক্ত হয় তবে যত বার উক্ত হয় তত সংখ্যক অঙ্ককে ঐ রাশির উপর চিহ্নিত করিলে ফল ব্যক্ত হইবে যথা ক, ক × ক, ক × ক × ক, ক × ক ×

of a; a^2, the *second power*, or *square* of a; a^3, the *third power*, or *cube* of a; a^4, the *fourth power*, or *biquadrate* of a.

The numbers 1, 2, 3, 4, &c. are called the *indices* of a; or *exponents* of the powers of a.

6. $\div$ *Divided by*, signifies that the former of the quantities between which it is placed is to be divided by the latter. Thus, $a \div b$ signifies that the quantity a is to be divided by b.

7. A line drawn over several quantities signifies that they are to be taken collectively, and it is called a *vinculum*. Thus $\overline{a - b + c} \times \overline{d - e}$ signifies that the quantity represented by $a - b + c$ is to be multiplied by the quantity represented by $d - e$. Let a stand for 6; b, 5; c, 4; d, 3; and e, 1; then $a - b + c$ is $6 - 5 + 4$, or 5; and $d - e$ is $3 - 1$, or 2; therefore $\overline{a - b + c} \times \overline{d - e}$ is 5×2, or 10. $\overline{ab - cd} \times \overline{ab - cd}$ or $\overline{ab - cd}|^2$ signifies that the quantity represented by $ab - cd$ is to be multiplied by itself.

Instead of a line, brackets are sometimes used, as $(ab - cd)^2$, $\{a - b + c\}$. $\{d - e\}$.

8. $=$ *Equal to*, signifies that the quantities between which it is placed are equal to each other, thus $ax - by = cd + ad$, signifies that the quantity $ax - by$ is equal to the quantity $cd + ad$.

9. The *square root* of any proposed quantity is that quantity whose square, or second power, gives the proposed quantity.

ক × ক এই কএক রাশি প্রকারান্তরে $ক^{১}$, $ক^{২}$, $ক^{৩}$, $ক^{৪}$, এই রূপে লিখা যায়। এই২ অঙ্ককে ঘাত কহে, যথা $ক^{১}$ ক রাশির এক ঘাত, $ক^{২}$ ক রাশির দ্বি ঘাত অর্থাৎ বর্গ, $ক^{৩}$ ক রাশির ত্রি ঘাত অর্থাৎ ঘন, $ক^{৪}$ ক রাশির চতুর্ঘাত, এস্থলে ১,২,৩,৪ এই২ অঙ্ককে ক রাশির ঘাত মাপক কহে।

৬।÷ ইহার নাম হরণ। যে২ রাশির মধ্যে এ চিহ্ন থাকে তাহার প্রথমকে দ্বিতীয় দ্বারা হরণ করিতে হয় যথা ক ÷ খ ইহার অর্থ খ দ্বারা ক রাশির হরণ।

৭ যদি কোন২ রাশির উপর রেখা অঙ্কিত থাকে তবে ঐ রাশির সমুচ্চয় লইয়া বিহিত কার্য্য করিতে হইবে আর সে রেখার নাম শৃখল যথা $\overline{ক - খ + গ} \times \overline{ঘ - ঙ}$ ইহার অর্থ যে ক — খ + গ এ বর্ণ সমূহে লক্ষিত রাশিকে ঘ — ঙ এই২ বর্ণ লক্ষিত রাশির দ্বারা গুণ করিতে হইবে, যদি ক ৬ হয় এবং খ ৫, গ ৪, ঘ ৩, ঙ ১ হয় তবে ক — খ + গ ৬ — ৫ + ৪ অর্থাৎ ৫ এবং ঘ — ঙ ৩ — ১ অর্থাৎ ২। অতএব $\overline{ক - খ + গ} \times \overline{ঘ - ঙ}$ ৫ × ২ অর্থাৎ ১০। $\overline{কখ - গঘ} \times \overline{কখ - গঘ}$ অথবা $\overline{কখ - গঘ}|^{২}$ ইহার অর্থ যে কখ — গঘ এই রাশি আপনার দ্বারা গুণ হইবে।

কখন২ পূর্ব্বোক্ত রেখা না লিখিয়া এই২ চিহ্ন ( ) { } লিখা যায় তাহারও ঐ অর্থ যথা $(কখ - গঘ)^{২}$, {ক — খ + গ}· {ঘ — ঙ}·

৮। = সমান। যে২ রাশির মধ্যে এ চিহ্ন থাকে তাহারা পরস্পর সমান জানিবা যথা কঅ — খই = গঘ + কঘ অর্থাৎ কঅ — খই, গঘ + কঘ সহিত সমান।

৯। বর্গ মূলের অর্থ এই যে যে রাশির দ্বিঘাত অর্থাৎ বর্গ করিলে নির্দ্দিষ্ট রাশি উৎপন্ন হয় সেই রাশি ইহার বর্গমূল।

10. If the root cannot be exactly determined, the quantity is called *irrational* or *surd*.

11. Points are made use of to denote *proportion*, thus $a : b :: c : d$, signifies that a bears the same proportion to b that c bears to d.

12. The number prefixed to any quantity, and which shows how often it is to be taken, is called its *co-efficient*. Thus, in the quantities $7ax$, $6by$, and $3dz$, 7, 6, and 3 are called the co-efficients of ax, by and dz respectively.

When no number is prefixed, the quantity is to be taken once, or the co-efficient 1 is understood.

These numbers are sometimes represented by letters, which are called co-efficients.

13. Similar, or *like* algebraical quantities are such as differ only in their co-efficients; $4a$, $6ab$, $9a^2$, $3a^2bc$, are respectively similar to $15a$, $3ab$, $12a^2$, $15a^2bc$, &c.

Unlike quantities are different combinations of letters; thus, ab, a^2b, ab^2, abc, &c. are unlike.

14. A quantity is said to be a *multiple* of another, when it contains it a certain number of times exactly; thus $16a$ is a multiple of $4a$, as it contains it exactly four times.

15. A quantity is called a *measure* of another, when the former is contained in the latter a certain number of times exactly; thus, $4a$ is a measure of $16a$.

16. *To add and subtract simple Algebraical Quantities.*—The addition of algebraical quantities is performed by connecting those that are *unlike* with their proper

১০। যদি মূল শুদ্ধরূপে নির্ণয় না হয় তবে তাহাকে করণী কহে।

১১। অনুপাত প্রকাশার্থে কএক বিন্দুর ব্যবহার হয় যথা ক : খ :: গ : ঘ ইহার অর্থ যাদৃশ খর সহিত কর অনুপাত তাদৃশ ঘর সহিত গর অনুপাত।

১২। যে অঙ্ক কোন রাশির অগ্রে সংলগ্ন থাকিয়া কত গুণ হইবে তাহা প্রকাশ করে তাহাকে ঐ রাশির প্রকৃতি কহে যথা ৭কঅ, ৬খই, ৩গউ, এস্থলে ৭, ৬, ৩ ইহারা কঅ, খই, গউ এই২ রাশির প্রকৃতি অর্থাৎ গুণ্য বোধক।

যখন রাশির অগ্রে কোন অঙ্ক সংলগ্ন না থাকে তখন সে রাশিকে এক গুণ করিতে হইবে অর্থাৎ তাহার প্রকৃতি ১ উহ্য হইবে। কখন২ পূর্ব্ব অক্ষরকেও প্রকৃতি কহে।

১৩। বীজ গণিতে যে২ রাশির বৈলক্ষণ্য কেবল প্রকৃতি বশতঃ হয় তাহাদিগকে সজাতীয় কহে যথা ৪ক, ৬কখ, ৯ক^{২}, ৩ ক^{২}খগ এবং ১৫ক, ৩কখ, ১২ক^{২}, ১৫ক^{২}খগ ইহারা ক্রমে২ পরস্পর সজাতীয়।

যাহাদের বৈলক্ষণ্য ভিন্ন২ বর্ণের সংযোগে হয় তাহাদিগকে বিজাতীয় রাশি কহে। যথা কখ, ক^{২}খ, কখ^{২}, কখগ, ইহারা সকলেই বিজাতীয় রাশি।

১৪। এক রাশি অন্য রাশির দ্বারা শুদ্ধ ভাজ্য হইলে সেই ভাজ্য রাশিকে ঐ অন্য রাশির অপবর্ত্ত্য কহে যথা ১৬ক, ৪ কর অপ বর্ত্ত্য, কেননা ১৬ক, ৪ কর ঠিক চতুর্গুণ, সুতরাং শুদ্ধ ভাজ্য।

১৫। এক রাশি অন্য রাশির শুদ্ধ ভাজক হইলে তাহাকে ঐ রাশির অপবর্ত্তক কহে যথা ৪ক, ১৬ কর অপবর্ত্তক।

১৬। অথ বীজগণিতে সঙ্কলন ব্যবকলনের ধারা। বিজাতীয় বর্ণকে আপন২ চিহ্নের সহিত সংযুক্ত কর ও সজাতীয় রাশিকে একত্র যোগ কর তাহাতে সঙ্কলন হইবে। যদি সজাতীয়

signs, and collecting those that are *similar* into one sum. If *like* quantities have different signs, subtract the less from the greater and prefix the sign of the greater to the difference which will be their sum.

Examples:

Add	Add
$4x$	$5ax$
$3x$	$-ax$
$7a$	by
$-2a$	$-cy$
Sum $7x+5a$	Sum $4ax+by-cy$

$a+2bx-y^2$	$a+3b$
$b-bx+3y^2$	$a+n-4b$
Sum $a+b+bx+2y^2$	Sum $2a+n-b$

17. Subtraction, or the taking away of one quantity from another, is performed by changing the sign of the quantity to be subtracted, and then adding it to the other by the rules laid down in Art. 16.

From	$7x$	From	$7x+5a$
Subtract	x	Subtract	$3a-x$
Diff.	$7x-x$ or $6x$	Diff	$7x+x+5a-3a$ or $8x+2a$

From	$4x^2+5ax-y^2$
Subtract	$3x^2-3ax+y^2$
Diff.	$x^2+8ax-2y^2$

রাশির ভিন্ন২ চিহ্ন থাকে তবে লঘুতরকে গুরুতর হইতে বাকি কাটিয়া অবশিষ্টের পূর্ব্বে গুরুতরের চিহ্ন লিখ তাহাতে উহাদের যোগ হইবে।

উদাহরণ।

৪অ	৫কঅ
৩অ	— কঅ
৭ক	কই
— ২ক	— গই
যোগ ৭অ + ৫ক	যোগ ৪কঅ + কই — গই

ক + ২খঅ — খ²	ক + ৩খ
খ — খঅ + ৩ খ²	ক + ট — ৪খ
যোগ ক + খ + খঅ + ২খ²	যোগ ২ক + ট — খ

১৭। ব্যবকলন অর্থাৎ এক রাশি হইতে অন্য রাশির বিয়োগ করিবার ধারা এই। যাহার বিয়োগ করিতে হইবে তাহার চিহ্নের বিপর্য্যয় করিয়া সঙ্কলনের পূর্ব্বোক্ত ধারানুসারে অন্য রাশির সহিত যোগ কর যথা।

৭অ হইতে
অ বিয়োগ কর

অবশিষ্ট ৭অ — অ অর্থাৎ ৬অ

৭অ + ৫ক হইতে
৩ক — অ বিয়োগ কর

অবশিষ্ট ৭অ + অ + ৫ক — ৩ক
অর্থাৎ ৮অ + ২ক

৪অ² + ৫কঅ — ই² হইতে
৩অ² — ৩কঅ + ই² বিয়োগ কর

অবশিষ্ট অ² + ৮কঅ — ২ ই²

18. *To multiply simple Algebraical Quantities.*—The multiplication of simple algebraical quantities must be represented according to the notation pointed out in Art. 4 and 5. Thus, $a \times b$, or ab, represents the product of a multiplied by b; abc, the product of the three quantities a, b, and c.

It is also indifferent in what order they are placed, $a \times b$ and $b \times a$ being equal.

19. If the quantities to be multiplied have co-efficients, these must be multiplied together as in common arithmetic; the literal product being determined by the preceding rules.

Thus, $3a \times 5b = 15ab$; because

$$3 \times a \times 5 \times b = 3 \times 5 \times a \times b = 15ab.$$

20. If the multiplier or multiplicand consist of several terms, each term of the latter must be multiplied by every term of the former, and the sum of all the products taken for the whole product of the two quantities. For example,

$$(a + b) \times (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

21. If the quantities to be multiplied have both the same signs, the product shall have + before it; if they have different signs the product shall have *minus*. Thus $a \times b = ab$; $-a \times -b = ab$; $a \times -b = -ab$.

The following signs are also used as symbols in Geometry :—

≠ unequal to
⌐ greater than
∠ less than
⌐̸ not greater than
∠̸ not less than
⊥ is perpendicular to
∥ is parallel to
∦ is not parallel to
∵ Because
∴ therefore
∠ angle
△ triangle

১৮। অথ গুণন। ৫ এবং ৫ সূত্রে যে প্রকার উক্তি আছে তদনুসারে বীজ গণিতে গুণন করিতে হয় যথা ক $\times$ খ অথবা কখ ইহাতে ক, খ দ্বারা গুণ হইলে যে ফল হয় তাহা উক্ত হইতেছে। কখগ ইহাতে ক এবং খ এবং গ ইহাদের পরস্পর গুণনের ফল ব্যক্ত হয়।

ফলের বর্ণ সমূহ যে অনুক্রমে থাকুক তাহাতে হানি নাই কেননা ক $\times$ খ এবং খ $\times$ ক উভয়ই সমান।

১৯। যদি গুণ্য রাশিদের কোন প্রকৃতি থাকে তবে গণিতানুসারে সে প্রকৃতির গুণ করিতে হইবে এবং অক্ষরের ফল পূর্ব্ব ধারানুযায়ি হইবে। যথা ৩ক $\times$ ৫খ $=$ ১৫কখ কেননা ৩ $\times$ ক $\times$ ৫ $\times$ খ $=$ ৩ $\times$ ৫ $\times$ ক $\times$ খ $=$ ১৫কখ।

২০। যদি গুণক কিম্বা গুণ্য রাশির অনেক অঙ্গ থাকে তবে প্রত্যেক অঙ্গকে পরস্পর গুণ করিতে হইবে এবং সে ফল সমূহের যোগে ঐ দুই রাশির ফল হইবে। উদাহরণ। (ক $+$ খ) $\times$ (গ $+$ ঘ) $=$ কগ $+$ খগ $+$ কঘ $+$ খঘ।

২১ যদি গুণ্য গুণকের চিহ্ন সমান হয় তবে তাহাদের ফলের চিহ্ন $+$ হইবে, যদি চিহ্ন সমান না হয় তবে ফলের চিহ্ন $-$ হইবে। যথা ক $\times$ খ $=$ কখ; $-$ ক $\times$ $-$ খ $=$ কখ; ক $\times$ $-$ খ $=$ $-$ কখ

এই২ চিহ্নও ক্ষেত্র ব্যবহারে প্রয়োগ হয়।

$\neq$	অর্থাৎ অসমান	$\parallel$	অর্থাৎ সমানান্তরাল
$>$	,, বৃহত্তর	$\nparallel$	,, সমানান্তরাল নহে
$<$	,, লঘুতর	$\because$	,, কেননা
$\ngtr$	,, বৃহত্তর নহে	$\therefore$	,, অতএব
$\nless$	,, লঘুতর নহে	$\angle$	,, কোণ
$\perp$	,, লম্ব	$\triangle$	,, ত্রিভুজ

ELEMENTS OF GEOMETRY.

BOOK I.

DEFINITIONS.

I. "A *point* is that which has position, but not "magnitude."

II. A *line* is length without breadth.

"COROLLARY. The extremities of a line are points; "and the intersections of one line with another are "also points."

III. "If two lines are such that they cannot coincide "in any two points, without coinciding altogether, "each of them is called a *straight* line."

"COR. Hence, two straight lines cannot enclose a "space. Neither can two straight lines have a com- "mon segment; for they cannot coincide in part, "without coinciding altogether."

IV. A *superficies* is that which has only length and breadth.

"COR. The extremities of a superficies are lines; "and the intersections of one superficies with another "are also lines."

V. A *plane superficies* is that in which any two points being taken, the straight line between them lies wholly in that superficies.

VI. A *plane rectilineal angle* is the inclination of two straight lines to one another, which meet together but are not in the same straight line.

N. B. "When several angles are at one point, B. "any one of them is expressed by three letters, of "which the letter that is at the vertex of the angle, "that is, at the point in which the straight lines that "contain the angle meet one another, is put between

ক্ষেত্র তত্ত্ব।

---

১ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।।

১ যাহার অবস্থিতি আছে কিন্তু মহত্ত্ব অর্থাৎ রাশি নাই তাহাকে বিন্দু বলা যায়।

২ যাহার দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু বিস্তার নাই তাহাকে রেখা কহা যায়।

অনুমান। রেখার সীমা বিন্দু, দুই রেখার পরস্পর অবচ্ছেদনেও বিন্দু উৎপন্ন হয়।

৩ দুই রেখা পরস্পর সমুদয় সংলগ্ন না হইলে এক বিন্দু ব্যতীত অন্য কোন বিন্দুতে যদি সংলগ্ন হইতে না পারে তবে তাহাদের প্রত্যেককে সরল রেখা কহা যায়।

অনুমান। অতএব দুই সরল রেখাতে কোন ক্ষেত্র পরিবেষ্টিত হইতে পারে না এবং দুই সরল রেখার এক সাধারণ খণ্ডও থাকিতে পারে না কেননা তাহারা সর্ব্বাংশে না মিলিয়া একাংশে মিলিতে পারে না।

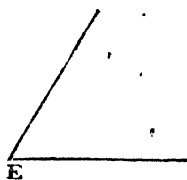
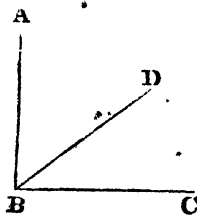
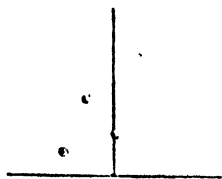
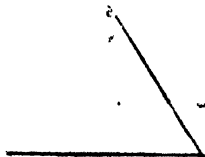
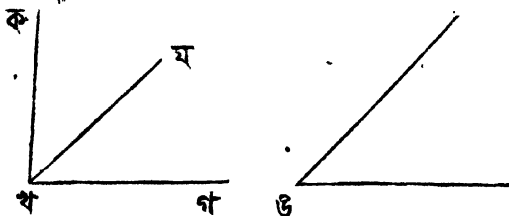
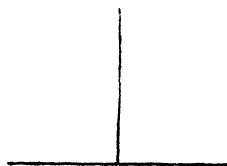
৪ যাহার কেবল দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে তাহাকে ধরাতল কহে।

অনুমান। ধরাতলের সীমা রেখা, এবং এক ধরাতল অন্য ধরাতলকে অবচ্ছিন্ন করিলে সে অবচ্ছেদনেতেও রেখার উৎপত্তি হয়।

৫ যে ধরাতলে দুই বিন্দু লইলে তাহাদের যোজক সরল রেখা সর্ব্বাংশে ঐ ধরাতলে সংলগ্ন থাকে তাহাকে সমধরাতল কহা যায়।

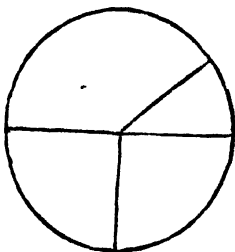
৬ দুই সরল রেখা ভিন্ন২ দিকে আসিয়া সংস্পর্শ করিলে তাহাদের পরস্পর অবনতিকে সরল রৈখিক কোণ কহা যায়।

যদি এক বিন্দুতে (যথা খ চিহ্ন) অনেক কোণ থাকে তবে তাহাদের মধ্যে কোন বিশেষ কোণকে উক্ত করিতে হইলে

"the other two letters, and one of these two is some-
"where upon one of those straight lines, and the other
"upon the other line; Thus the angle which is con-
"tained by the straight lines AB, CB, is named the
"angle ABC, or CBA; that which is contained by
"AB, BD is named the angle ABD, or DBA; and that
"which is contained by DB, CB, is called the angle
"DBC, or CBD; but if there be only one angle at
"a point, it may be expressed by a letter placed at
"that point; as the angle at E."

VII. When a straight line standing on another straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of the angles is called a *right angle*; and the straight line which stands on the other is called a *perpendicular* to it.

VIII. An *obtuse angle* is that which is greater than a right angle.

তিন অক্ষরের দ্বারা করিতে হয়—কোণাগ্রে অর্থাৎ যেখানে সরল রেখাদ্বয়ের সংস্পর্শ সেই স্থলের অঙ্কিত অক্ষরকে মধ্যাক্ষর করিতে হয় আর যে রেখাদ্বয়ের সংস্পর্শে কোণের উৎপত্তি হইয়াছে তাহাদের এক রেখার কোন অংশে লিখিত এক অক্ষর এবং অন্য রেখার কোন স্থলে লিখিত আর এক অক্ষর লইতে হয়—যথা নিম্নস্থ ক্ষেত্রে কখ এবং গখ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্ত্তি কোণকে কখগ কিম্বা গখক কহিতে হয় এবং কখ ও খঘ দ্বারা উৎপন্ন কোণকে কখঘ কিম্বা ঘখক কহিতে হয়, ও ঘখ এবং গখ দ্বারা উৎপন্ন কোণকে ঘখগ কিম্বা গখঘ কহিতে হয়, কিন্তু এক চিহ্নে কেবল এক কোণ থাকিলে সেই চিহ্নস্থ অক্ষর দ্বারা তাহা উক্ত হইতে পারে যথা ঙ কোণ।

৭ এক সরল রেখা অন্য সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে যদি উভয়পার্শ্বের কোণ পরস্পর সমান হয় তবে ঐ প্রত্যেক কোণকে সমকোণ কহা যায়—আর এমত দণ্ডায়মান সরল রেখাকে লম্ব কহা যায়।

৮ সমকোণ হইতে অতিরিক্ত হইলে অধিক কোণ কহে।

IX. An *acute angle* is that which is less than a right angle.

X. A *figure* is that which is enclosed by one or more boundaries.—"The space contained within a figure "is called the *Area* of the Figure."

XI. A *circle* is a plane figure contained by one line, which is called the *circumference*, and is such that all straight lines drawn from a certain point within the figure to the circumference, are equal to one another.

XII. This point is called the *centre* of the circle.

XIII. A *diameter* of a circle is a straight line drawn through the centre, and terminated both ways by the circumference.

XIV. A *semicircle* is the figure contained by a diameter and the part of the circumference cut off by the diameter.

XV. *Rectilineal* figures, are those which are contained by straight lines.

XVI. *Trilateral* figures or *triangles*, by *three* straight lines.

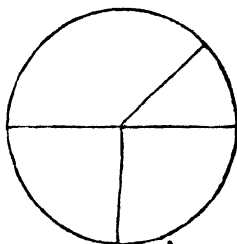
XVII. *Quadrilateral*, by *four* straight lines.

XVIII. *Multilateral* figures, or *polygons*, by more than four straight lines.

XIX. Of three-sided figures, an *equilateral* triangle is that which has three equal sides.

৯ সমকোণ হইতে অল্প হইলে লঘু কোণ কহে।

১০ যাহা এক কিম্বা অনেক সীমাতে আবৃত তাহাকে আকৃতি কহে, আকৃতির আবৃত স্থলকে ক্ষেত্র ফল কহে।

১১ যাহার সীমা এক রেখাতে বদ্ধ এবং অন্তরে এমত এক বিন্দু আছে যে তথা হইতে যত সরল রেখা সীমা পর্য্যন্ত টানা যায় সকলি পরস্পর সমান, এমত সরল আকৃতিকে বৃত্ত কহা যায় আর ঐ সীমার নাম পরিধি।

১২ উক্ত অন্তরস্থ বিন্দুর নাম কেন্দ্র।

১৩ বৃত্তের অন্তরে কেন্দ্রের মধ্য দিয়া দুই দিকে পরিধি পর্য্যন্ত কোন সরল রেখা টানিলে তাহাকে ঐ বৃত্তের ব্যাস কহা যায়।

১৪ ব্যাস এবং পরিধির যে অংশ ব্যাস দ্বারা ছিন্ন এই দুই সীমার মধ্যে যে আকৃতি থাকে তাহাকে অর্দ্ধবৃত্ত কহে।

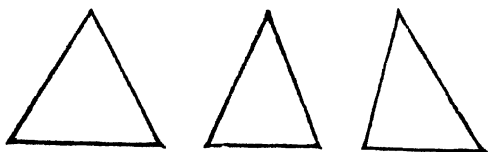
১৫ সরল রেখার অন্তর্গত আকৃতিকে সরল রৈখিক ক্ষেত্র কহে।

১৬ তিন সরল রেখাবৃত ক্ষেত্রের নাম ত্রিভুজ।

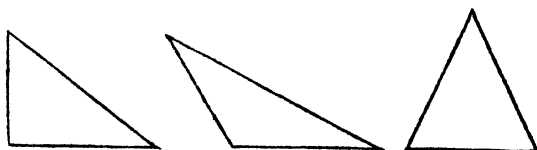
১৭ চারি সরল রেখাবৃত ক্ষেত্রের নাম চতুর্ভুজ।

১৮ চারির অধিক সরল রেখাবৃত ক্ষেত্রের নাম বহুকোণ ক্ষেত্র।

১৯ তিন বাহু বিশিষ্ট আকৃতির মধ্যে যাহার তিন বাহুই সমান তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ কহে।

XX. An *isosceles* triangle is that which has only two sides equal.

XXI. A *scalene* triangle is that which has three unequal sides.

XXII. A *right-angled* triangle is that which has a right angle.

XXIII. An *obtuse-angled* triangle is that which has an obtuse angle.

XXIV. An *acute-angled* triangle is that which has three acute angles.

XXV. Of four-sided figures, a *square* is that which has all its sides equal, and all its angles right angles.

XXVI. An *oblong* is that which has all its angles right angles, but has not all its sides equal.

২০ যাহার দুই বাহু সমান তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ কহে।

২১ যাহার তিন বাহু বিষম তাহাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ কহে।

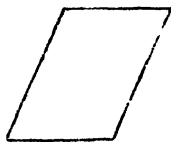
২২ যে ত্রিভুজের মধ্যে সম কোণ থাকে তাহাকে সমকোণি অথবা জাত্য ত্রিভুজ কহে।

২৩ যে ত্রিভুজের মধ্যে এক অধিক কোণ থাকে তাহাকে অধিক কোণি ত্রিভুজ কহে।

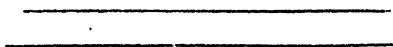
২৪ যে ত্রিভুজের মধ্যেসকল কোণ লঘু, তাহাকে লঘু কোণি ত্রিভুজ কহে।

২৫ চতুর্ভুজের মধ্যে যাহার চারি বাহু সমান ও চারি কোণ সমকোণ তাহাকে সমচতুর্ভুজ বা সমচতুষ্কোণ অথবা বর্গ ক্ষেত্র কহে।

২৬ যে চতুর্ভুজের কোণ সকল সমকোণ কিন্তু সকল বাহু পরস্পর সমান নহে তাহাকে আয়ত কহে।

XXVII. A *rhombus* is that which has all its sides equal, but its angles are not right angles.

XXVIII. A *rhomboid* is that which has its opposite sides equal to one another, but all its sides are not equal, nor its angles right angles.

XXIX. All other four-sided figures besides these are called *Trapeziums*.

XXX. Straight lines which are in the same plane, and, being produced ever so far both ways, do not meet, are called *Parallel* Lines.

POSTULATES.

I. Let it be granted that a straight line may be drawn from any one point to any other point.

II. That a terminated straight line may be produced to any length in a straight line.

III. And that a circle may be described from any centre, at any distance from that centre.

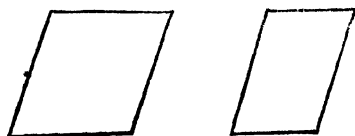
AXIOMS.

I. Things which are equal to the same thing are equal to one another.

II. If equals be added to equals, the wholes are equal.

III. If equals be taken from equals, the remainders are equal.

IV. If equals be added to unequals, the wholes are unequal.

২৭ যে চতুর্ভুজের সমস্ত বাহু পরস্পর সমান কিন্তু সকল কোণ সমকোণ নহে তাহাকে রম্বস কহে।

২৮ যে চতুর্ভুজের সম্মুখস্থ বাহু দ্বয় সমান কিন্তু সকল কোণ সমান নহে ও সমকোণও নহে তাহাকে রম্বৈড কহে।

২৯ এতদ্ব্যতিরিক্ত অন্য প্রকার চতুর্ভুজকে বিষম চতুর্ভুজ কহে।

৩০ যে২ সরল রেখা এক সম ধরাতলে থাকিয়া উভয় পার্শ্বে অবিশ্রান্ত বৃদ্ধি পাইলেও পরস্পর সংস্পর্শ করে না তাহাদিগকে সমানান্তরাল সরল রেখা কহে।

স্বীকার্য্য কথা।

১ এক বিন্দু হইতে অন্য কোন বিন্দু পর্য্যন্ত সরল রেখা টানা যায় ইহা স্বীকার্য্য।

২ সীমা বিশিষ্ট সরল রেখা যথেচ্ছ দৈর্ঘ্যে সরল ভাবে বৃদ্ধি পাইতে পারে ইহা স্বীকার্য্য।

৩ কোন কেন্দ্র হইতে যথেচ্ছ দূরে যত্র তত্র বৃত্ত আঁকা যায় ইহা স্বীকার্য্য।

স্বতঃ সাধ্য।

১ যে২ বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান তাহারা পরস্পর সমান।

২ সমান বস্তুতে সমান বস্তুদ্বয় যোগ করিলে সমুদয় সমান হয়।

৩ সমান বস্তু হইতে সমান বস্তুর বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট সমান হয়।

৪ সমান বস্তু বিষম বস্তুতে যোগ করিলে সমুদয় বিষম হয়।

V. If equals be taken from unequals, the remainders are unequal.

VI. Things which are doubles of the same thing, are equal to one another.

VII. Things which are halves of the same thing, are equal to one another.

VIII. Magnitudes which coincide with one another, that is, which exactly fill the same space, are equal to one another.

IX. The whole is greater than its part.

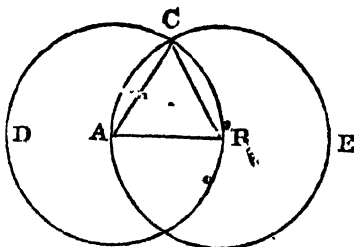
X. All right angles are equal to one another.

XI. "Two straight lines which intersect one another, cannot be both parallel to the same straight line."

PROPOSITION I. PROBLEM.

To describe an equilateral triangle upon a given finite straight line.

Let AB be the given straight line; it is required to describe an equilateral triangle upon it.

From the centre A, at the distance AB describe (3 Post.) the circle BCD, and from the centre B, at the distance BA, describe the circle ACE; and from the point C, in which the circles cut one another, draw the straight lines (1. Post.) CA, CB, to the points A, B; ABC is an equilateral triangle.

Because the point A is the centre of the circle BCD, AC is equal (11 Definition) to AB; and because the point B is the centre of the circle ACE, BC is equal to AB: But it has been proved, that CA is equal to AB; therefore CA, CB are each of them equal

৫ বিষম বস্তু হইতে সমান বস্তুর বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট বিষম হয়।

৬ যে২ বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর দ্বিগুণ তাহারা পরস্পর সমান।

৭ যে২ বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অর্দ্ধ তাহারা পরস্পর সমান।

৮ যে২ রাশি পরস্পর মিলে অর্থাৎ যাহারা এক স্থানকে ঠিক আবরণ করে তাহারা পরস্পর সমান।

৯ অংশ হইতে সমুদয় বৃহৎ।

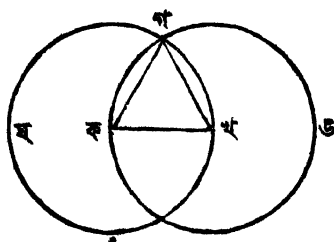
১০ সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

১১ দুই সরল রেখা পরস্পরকে অবচ্ছিন্ন করিলে উভয়ে কোন এক সরল রেখার সমানান্তরাল হইতে পারে না।

১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবেক।

কখ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ইহার উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক কেন্দ্র হইতে কখ দূর পর্য্যন্ত এক বৃত্ত অঙ্কিত কর তাহার নাম খগঘ হউক এবং খ কেন্দ্র হইতে খক দূর পর্য্যন্ত আর এক বৃত্ত অঙ্কিত কর তাহার নাম কগঙ—যে বিন্দুতে এই দুই বৃত্ত পরস্পর অবচ্ছিন্ন হয় অর্থাৎ গ চিহ্ন, তথা হইতে ক এবং খ পর্য্যন্ত দুই সরল রেখা টান অর্থাৎ কগ এবং খগ রেখাকর—তাহাতে কখগ এক সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

উপপত্তি। খগঘ এক বৃত্ত ইহার কেন্দ্র ক অতএব (১১ সংজ্ঞানুসারে) কখ ও কগ এই দুই সরল রেখা পরস্পর

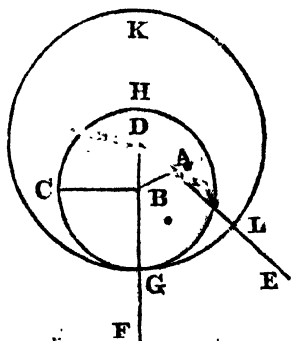
to AB; now, *things which are equal to the same thing are equal to one another* (1 Axiom); therefore CA is equal to CB; wherefore CA, AB, CB are equal to one another; and the triangle ABC is therefore equilateral, and it is described upon the given straight line AB. which was required to be done.

Symbolical demonstration. AC = AB (11 Def.) CB = AB (11 Def.) ∴ AC = CB = AB (1 Ax.)

PROP. II. PROB.

From a given point to draw a straight line equal to a given straight line.

Let A be the given point, and BC the given straight line; it is required to draw, from the point A, a straight line equal to BC.

From the point A to B draw (1 Post.) the straight line AB; and upon it describe (1. 1.) the equilateral triangle DAB, and produce (2 Post.) the straight lines DA, DB, to E and F; from the centre B, at the distance BC, describe (3 Post.) the circle CGH, and from the centre D, at the distance DG. describe the circle GKL. The straight line AL is equal to BC.

Because the point B is the centre of the circle CGH, BC is equal (11 Def.) to BG; and because D is the centre of the circle GKL, DL is equal to DG, and DA, DB, parts of them, are equal; therefore the re-

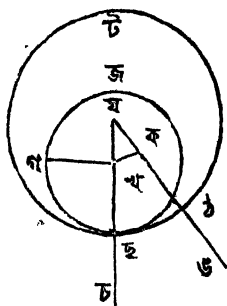
সমান এবং কগঙ এক বৃত্ত তাহার কেন্দ্র খ অতএব (১১ সংজ্ঞানুসারে) কখ ও খগ এই দুই সরল রেখা পরস্পর সমান, সুতরাং কগ ও খগ প্রত্যেকে কখ রেখার সহিত সমান হওয়াতে (১ স্বতঃসাধ্যানুসারে) কখ কগ খগ এতিন সরল রেখা পরস্পর সমান এবং তন্নিমিত্তে কখগ এক সমবাহু ত্রিভুজ।

সঙ্কেতে উপপত্তি। কগ = কখ (১১ সংজ্ঞা)। খগ = কখ (ঐ) ∴ কগ = খগ = কখ (১ স্বতঃসাধ্য)।

২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমান আর এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

ক এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু—খগ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা—ক বিন্দু হইতে খগ সরল রেখার সমান এক সরল রেখা টানিতে হইবেক.

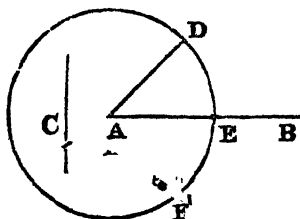
ক এবং খ এক সরল রেখাতে সংযুক্ত কর—কখ সরল রেখার উপর (১ প্রতিজ্ঞানুসারে) কখঘ এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর—ঘখ এবং ঘক এই দুই সরল রেখাকে চ এবং ঙ বিন্দু পর্য্যন্ত টান—খ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া খগ দূর পর্য্যন্ত এক বৃত্ত অঙ্কিত কর—অর্থাৎ গছজ, এবং ঘ বিন্দু হইতে ঘছ দূর পর্য্যন্ত এক বৃত্ত অঙ্কিত কর অর্থাৎ ছঠট—কঠ এই সরল রেখা খগ সরল রেখার সহিত সমান.

উপপত্তি। গছজ এই বৃত্তের কেন্দ্র খ, অতএব খগ এবং খছ পরস্পর সমান—এবং ছঠট এক বৃত্ত, ইহার কেন্দ্র ঘ. অতএব ঘছ ঘঠ পরস্পর সমান—এবং কখঘ সমবাহু ত্রিভুজ এজন্য ঘখ এবং ঘক পরস্পর সমান—অতএব সমুদয় ঘছ এবং সমুদয় ঘঠ পরস্পর সমান সত্ত্বে তাহাদের অংশ ঘখ এবং ঘক পরস্পর সমান হওয়াতে অবশিষ্ট খছ এবং কঠ পরস্পর

mainder AL is equal to the remainder (3 Ax.) BG: But it has been shown, that BC is equal to BG; wherefore, AL and BC are each of them equal to BG; and *things that are equal to the same thing are equal to one another*; therefore the straight line AL is equal to BC. Wherefore, *from the given point* A, *a straight line* AL *has been drawn equal to the given straight line* BC. Which was to be done.

Sym. dem.—BC = BG (11 Def.) DL = DG (11 Def.) DA = DB (by construction) ∴ DL—DA (or AL) = DG—DB (or BG) (3 Ax.) but BG = BC ∴ AL = BC (1 Ax.)

PROP. III. PROB.

From the greater of two given straight lines to cut off a part equal to the less.

Let AB and C be the two given straight lines whereof AB is the greater. It is required to cut off from AB, the greater, a part equal to C, the less.

From the point A draw (2 I.) the straight line AD equal to C; and from the centre A, and at the distance AD, describe (3 Post.) the circle DEF; and because A is the centre of the circle DEF, AE is equal to AD; but the straight line C is likewise equal to AD; whence AE and C are each of them equal to AD; wherefore, the straight line AE is equal to (1 Ax.) C, and *from* AB *the greater of two straight lines, a part* AE *has been cut off equal to* C *the less*. Which was to be done.

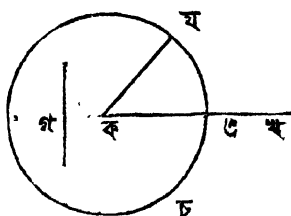
C = AD (by construction) AE = AD (11 Def.) ∴ C = AE (1. Ax.)

সমান নিশ্চয় হইল, আর পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে খছ এবং খগ পরস্পর সমান সুতরাং খগ এবং কঠ প্রত্যেকে খছ সহিত সমান, অতএব কঠ রেখা খগ রেখার সহিত সমান। এইরূপে ক বিন্দু হইতে খগ দৃষ্ট রেখা তুল্য অন্য এক রেখা অঙ্কিত হইল।

সঙ্কেতে উপপত্তি। খগ = খছ (১১ সংজ্ঞা) ঘছ = ঘঠ (১১ সংজ্ঞা) ঘখ = ঘক ∴ ঘছ — ঘখ (অর্থাৎ খছ) = ঘঠ— ঘক (অর্থাৎ কঠ) ∴ কঠ = খছ = খগ (১ স্বতঃ সাধ্য)।

৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

দুই সরল রেখার মধ্যে বৃহত্তর হইতে লঘুতরের সমান এক অংশ ছেদ করিতে হইবে।

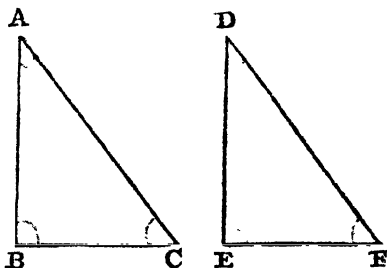
কখ এবং গ দুই সরল রেখা তাহার মধ্যে কখ বৃহত্তর, কখ হইতে গ সমান এক অংশ ছেদ করিতে হইবে।

ক বিন্দু হইতে গ সমান এক সরল রেখা (২ প্রতিজ্ঞানুসারে) টান অর্থাৎ কঘ রেখা কর এবং ক কেন্দ্র হইতে কঘ দূর পর্য্যন্ত ঘঙচ এক বৃত্ত অঙ্কিত কর। কঙ সরল রেখা গ সমান হইয়া কখ হইতে ছিন্ন হইল।

উপপত্তি। ক কেন্দ্র হইতে কঘ পর্য্যন্ত ঘঙচ এক বৃত্ত অঙ্কিত হইয়াছে অতএব কঘ এবং কঙ পরস্পর সমান, অপর কঘ এবং গ পরস্পর সমান, অতএব কঙ এবং গ প্রত্যেকে কঘ সমান, সুতরাং কঙ এবং গ পরস্পর সমান। এইরূপে কখ বৃহত্তর রেখা হইতে গ সমান এক অংশ ছিন্ন হইল।

সঙ্কেতে উপপত্তি। গ = কঘ। কঘ = কঙ (১১ সংজ্ঞা) ∴ গ = কঘ = কঙ (১ স্বতঃসাধ্য)।

PROP. IV. THEOREM.

If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each; and have likewise the angles contained by those sides equal to one another, their bases or third sides *are equal; and the areas of the triangles are equal; and their other angles are equal, each to each, viz. those to which the equal sides are opposite*.*

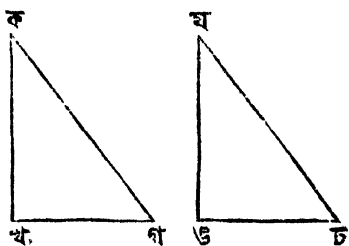
Let ABC, DEF be two triangles which have the two sides AB, AC equal to the two sides DE, DF, each to each, viz. AB to DE, and AC to DF; and let the angle BAC be also equal to the angle EDF: then shall the base BC be equal to the base EF; and

the triangle ABC to the triangle DEF; and the other angles, to which the equal sides are opposite, shall be equal, each to each, viz. the angle ABC to the angle DEF, and the angle ACB to DFE.

For, if the triangle ABC be applied to the triangle DEF, so that the point A may be on D, and the straight line AB upon DE; the point B must coincide with the point E, because AB is equal to DE; and AB coinciding with DE, AC must coincide with DF, because the angle BAC is equal to the angle EDF; wherefore also the point C must coincide with the

* The three conclusions in this enunciation are more briefly expressed by saying, *that the triangles are in every way equal.*

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটীর দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত প্রত্যেকে সমান হয় এবং ঐ বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্ত্তি কোণ দ্বয়ও যদি পরস্পর সমান হয় তবে ঐ ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমি অর্থাৎ অবশিষ্ট বাহুও পরস্পর সমান হইবে এবং ঐ ত্রিভুজ ক্ষেত্রদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে এবং সমান বাহুর সম্মুখস্থ অবশিষ্ট কোণও পরস্পর সমান হইবে*।

কখগ এবং ঘঙচ দুই ত্রিভুজ, তাহার মধ্যে কখ এবং কগ, ঘঙ এবং ঘচ পরস্পর ক্রমশ সমান অর্থাৎ কখ, ঘঙ সহিত, ও কগ, ঘচ সহিত সমান, এবং খকগ এই কোণ ঙঘচ কোণের সহিত সমান, অতএব খগ এই ভূমি ঙচ ভূমির সহিত সমান এবং কখগ এই ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সহিত সমান এবং তাহাদের সমান২ বাহুর সম্মুখস্থ কোণও পরস্পর সমান অর্থাৎ কখগ এই কোণ ঘঙচ কোণের সহিত সমান ও কগখ এই কোণ ঘচঙ কোণের সহিত সমান।

উপপত্তি। যদি কখগ এই ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের উপর এমত প্রকারে রাখ যে ক বিন্দু ঘ বিন্দুর উপর পড়ে এবং কখ এই সরল রেখা ঘঙ এই সরল রেখার উপর পড়ে, তবে খ বিন্দুও ঙ বিন্দুর উপর অবশ্য পড়িবে কেননা কখ এবং ঘঙ পরস্পর সমান, এবং কখ ও ঘঙ মিলিত হইলে কগ রেখা ঘচ সহিত মিলিবে কেননা খকগ এই মধ্যবর্ত্তি কোণ ঙঘচ মধ্যবর্ত্তি কোণের সহিত সমান, এবং কগ, ঘচ সহিত মিলিলে গও তদ্রূপ চ

---

* এই প্রতিজ্ঞার তিন সাধ্য একেবারে নির্দ্দেশ হইতে পারে যথা দুই ত্রিভুজ সর্ব্বতোভাবে সমান।

point F, because AC is equal to DF: But the point B coincides with the point E; wherefore the base BC must coincide with the base EF (Cor. Def. 3.), and be equal to it. Therefore also, the whole triangle ABC must coincide with the whole triangle DEF, so that the spaces which they contain, or their *areas* (3. Ax.) are equal; and the remaining angles of the one must coincide with the remaining angles of the other, and be equal to them viz. the angle ABC to the angle DEF, and the angle ACB to the angle DFE. Therefore, *if two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and have likewise the angles contained by those sides equal to one another; their bases are equal, and their areas are equal, and their other angles, to which the equal sides are opposite, are equal, each to each. Which was to be demonstrated.*

Sym. dem.—B coincides with E ∵ AB = DE; AC coincides with DF ∵ ∠ BAC = ∠ EDF; C coincides with F ∵ AC = DF ∴ BC coincides with EF (cor. 3 def.) ∴ BC = EF (8 Ax.) △ ABC = △ DEF; ∠ ABC = ∠ DEF; ∠ ACB = ∠ DFE (8 Ax.)

PROP. V. THEOR.

The angles at the base of an isosceles triangle are equal to one another; and if the equal sides be produced, the angles upon the other side of the base shall also be equal.

Let ABC be an isosceles triangle, of which the side AB is equal to AC, and let the straight lines, AB, AC be produced to D and E: the angle ABC shall be equal to the angle ACB, and the angle CBD to the angle BCE.

In BD take any point F, and from AE the greater cut off AG equal (3. 1.) to AF the less, and join FC, GB.

Because AF is equal to AG, and AB to AC, the two sides FA, AC are equal to the two GA, AB, each to

উপর পড়িবে কেননা কগ, ঘচ সহিত সমান, অতএব খ বিন্দু ঙ সহিত এবং গ বিন্দু চ সহিত মিলিলে (৩ সংজ্ঞার অনুমানানুসারে) খগ ভূমিও ঙচ ভূমির সহিত মিলিয়া সমান হইবে সুতরাং কখগ এই সমস্ত ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সহিত সম্যক্ মিলিয়া পরস্পর সমান হইবে, এবং একটীর অবশিষ্ট কোণ দ্বয় অন্যটীর অবশিষ্ট কোণ দ্বয়ের সহিত মিলিবে ও সমান হইবে অর্থাৎ কখগ এবং ঘঙচ পরস্পর সমান হইবে এবং কগখ ও ঘচঙ পরস্পর সমান হইবে। অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটীর দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত প্রত্যেকে সমান হয় এবং ঐ বাহু দ্বয়ের মধ্যবর্ত্তি কোণ দ্বয়ও যদি পরস্পর সমান হয় তবে ঐ ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমি অর্থাৎ অবশিষ্ট বাহুও পরস্পর সমান হইবে এবং ঐ দুই ত্রিভুজও পরস্পর সমান হইবে এবং সমান বাহুর সম্মুখস্থ অবশিষ্ট কোণও পরস্পর সমান হইবে।

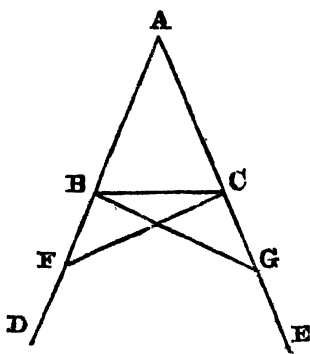
সঙ্কেতে উপপত্তি। খ, ঙ সহিত মিলিবে ∵ কখ = ঘঙ। কগ, ঘচ সহিত মিলিবে ∵ ∠ খকগ = ∠ ঙঘচ। গ, চ সহিত মিলিবে ∵ কগ = ঘচ ∴ খগ, ঙচ সহিত মিলিবে (৩ সংজ্ঞার অনুমান) ∴ খগ = ঙচ (৮ স্বতঃ সাধ্য) △ কখগ = △ ঙঘচ, এবং ∠ কখগ = ∠ ঘঙচ, এবং ∠ কগখ = ∠ ঘচঙ।

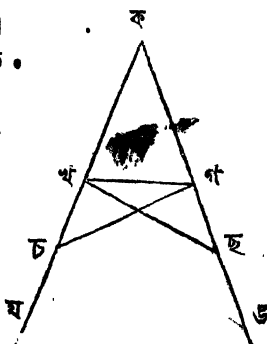
৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিতে সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান এবং যদি সমান বাহুদ্বয়ের বৃদ্ধি করা যায় তবে ভূমির অপর পার্শ্বস্থ কোণদ্বয়ও সমান হইবে।

কখগ এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যাহার কখ বাহু কগ বাহুর সহিত সমান। এই বাহুদ্বয় ঘ এবং ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাউক কখগ কোণ কগখ কোণের সহিত সমান এবং গখঘ কোণ খগঙ কোণের সহিত সমান হইবে।

খঘ সরল রেখার মধ্যে কোন এক বিন্দুর নির্দ্দেশ কর যথা চ এবং (৩ প্রতিজ্ঞানুসারে) কঙ বৃহত্তর হইতে কচ লঘুতরের

each; and they contain the angle FAG common to the two triangles, AFC, AGB; therefore the base FC is equal (4. 1.) to the base GB, and the triangle AFC to the triangle AGB; and the remaining angles of the one are equal (4. 1.) to the remaining angles of the other, each to each, to which the equal sides are opposite, viz. the angle ACF to the angle ABG, and the angle AFC to the angle AGB: And because the whole AF is equal to the whole AG and the part AB to the part AC; the remainder BF is equal (3 Ax.) to the remainder CG; and FC was proved to be equal to GB; therefore the two sides BF, FC are equal to the two CG, GB, each to each; but the angle BFC is equal to the angle CGB; wherefore, the triangles BFC, CGB are equal, (4. 1.) and their remaining angles are equal, to which the equal sides are opposite; therefore the angle FBC is equal to the angle GCB, and the angle BCF to the angle CBG. Now, since it has been demonstrated, that the whole angle ABG is equal to the whole ACF, and the part CBG to the part BCF, the remaining angle ABC is therefore equal to the remaining angle ACB, which are the angles at the base of the triangle ABC: And it has also been proved, that the angle FBC is equal to the angle GCB, which are the angles upon the other side of the base. Therefore, *the angles at the base, &c.* Q. E. D.

COROLLARY. Hence, *every equilateral triangle is also equiangular.*

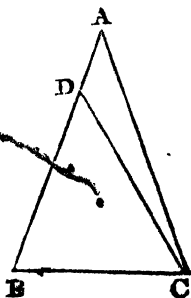
সমান এক অংশ ছেদ কর যথা কছ। এবং চ, গ ও ছ, খ, সরল রেখাতে সংযুক্ত কর।

কখ এবং কগ পরস্পর সমান এবং কছ ও কচ পরস্পর সমান অতএব কচগ ও কছখ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে চক ও কগ দুই বাহু, ছক ও কখ দুই বাহুর সহিত একে২ সমান এবং চকছ এই কোণ কচগ ও কছখ এ উভয় ত্রিভুজের মধ্যে সামান্য ভাবে আছে অতএব (৪ প্রতিজ্ঞানুসারে) ঐ ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমিও পরস্পর সমান অর্থাৎ চগ, ছখ সহিত সমান, এবং ঐ ত্রিভুজ দ্বয়ও পরস্পর সমান ও তাহাদের অবশিষ্ট কোণ দ্বয় যাহা সমান২ বাহুর সম্মুখস্থ তাহারাও একে২ পরস্পর সমান অর্থাৎ কখছ, কগচ সহিত, ও কছখ, কচগ সহিত সমান। এবং কচ, কছ সহিত সমান ও কখ, কগ সহিত সমান অতএব এই শেষোক্ত সরল রেখাদ্বয় পূর্ব্বোক্ত রেখাদ্বয় হইতে অবচ্ছিন্ন হইলে (৩ স্বতঃসাধ্যানুসারে) অবশিষ্ট খচ ও গছ পরস্পর সমান হইবে এবং চগ ও খছ পরস্পর সমান উপপন্ন হইয়াছে অতএব এই অপর ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্যে খচ ও চগ, গছ ও ছখ সহিত একে২ পরস্পর সমান এবং ইহাদের মধ্যবর্ত্তি কোণ দ্বয়ও অর্থাৎ খচগ ও গছখ পরস্পর সমান সপ্রমাণ হইয়াছে অতএব (৪ প্রতিজ্ঞানুসারে) এই ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান এবং ইহাদের অবশিষ্ট কোণ যাহা সমান২ বাহুর সম্মুখস্থ তাহারাও একে২ পরস্পর সমান অর্থাৎ খগচ, গখছ সহিত, এবং গখচ, খগছ সহিত পরস্পর সমান। সম্প্রতি কখছ এই কোণ কগচ সহিত সমান সপ্রমাণ হইয়াছে এবং গখছ (যাহা কখছ কোণের এক অংশ) তাহা খগচ (যাহা কগচ কোণের এক অংশ) তাহার সহিত সমান অতএব এই সমুদয় সমান কোণ

Sym. dem.—AB = AC ; AG = AF ; ∠FAG common to △s AFC, AGB ∴ BG = FC, ∠ ABG = ∠ ACF, ∠AFC = AGB (4. of 1.) Again AF—AB (i. e. BF) = AG—AC (i. e. CG) by 3 Ax. And ∠ BFC = ∠ CGB ∴ △ BFC = △ CGB, ∠ BCF = CBG, ∠ BCG, = ∠ CBF (4 of 1) ∴ ∠ ABG—∠ CBG (i. e. ∠ ABC) = ∠ ACF—BCF (i. e. ∠ ACB.)

PROP. VI. THEOR.

If two angles of a triangle be equal to one another, the sides which subtend, or are opposite to them, are also equal to one another.

Let ABC be a triangle having the angle ABC equal to the angle ACB ; the side AB is also equal to the side AC.

For, if AB be not equal to AC, one of them must be greater than the other. Let AB be the greater, and from it (3. 1.) cut off BD equal to AC the less, and join DC ; therefore, because in the triangles DBC, ACB, DB is equal to AC, and BC common to both, the two sides DB, BC are equal to the two AC, CB, each to each ; but the angle DBC is also equal to the angle ACB ; therefore the base DC is equal to the base AB, and the area of the triangle DBC is equal to that of the triangle ACB (4. 1.) the less to the greater ; which is absurd. Therefore, AB *is not unequal to* AC, that is, *it is equal to it.* Wherefore, *if two angles, &c.* Q. E. D.

Cor. Hence, *every equiangular triangle is also equilateral.*

Sym. dem.—BD = AC (by construction) BC, is common to △s DBC and ACB, ∠ DBC = ∠ ACB

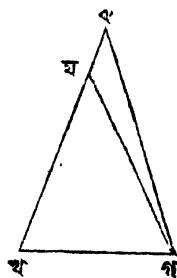
দ্বয় হইতে সমান২ অংশ বিয়োগ করিলে. অবশিষ্ট ভাগদ্বয় (৩ স্বতঃ সাধ্যানুসারে) অবশ্য সমান হইবে সুতরাং কখগ কোণ কগখ সহিত সমান। আর ইহারাই ভূমিতে সংলগ্ন কোণ। এবং ভূমির অপর পার্শ্বের কোণ দ্বয় অর্থাৎ গখঘ এবং খগঙ যে সমান তাহা পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে। অতএব সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিতে সংলগ্ন কোণ দ্বয়, ইত্যাদি।

অনুমান। অতএব সমবাহু ত্রিভূজ সমান কোণিও হইবে।

সঙ্কেতে উপপত্তি। কখ = কগ। কছ = কচ। ∠ চকছ, △ কচগ ও কছখ উভয় পক্ষে সামান্য ∴ (৪ প্রতিজ্ঞা) চগ = খছ, ∠ কখছ = ∠ কগচ, ∠ কচগ = ∠ কছখ। (৩ স্বতঃ সাধ্যানুসারে) কচ—কখ (অর্থাৎ খচ) = কছ — কগ (অর্থাৎ গছ)। (পূর্ব্বোক্ত) চগ = ছখ। ∠ খচগ = ∠ গছখ ∴ (৪ প্রতিজ্ঞানুসারে) △ খচগ = △ গছখ, ∠ খগচ = ∠ গখছ, ∠ গখচ = খগছ ∴ ∠ কখছ— ∠ গখছ (অর্থাৎ ∠ কখগ) = ∠ কগচ— ∠ খগচ (অর্থাৎ ∠ কগখ.)

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কোন ত্রিভূজের দুই কোণ পরস্পর সমান হয় তবে ঐ সমান কোণের সম্মুখস্থ বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

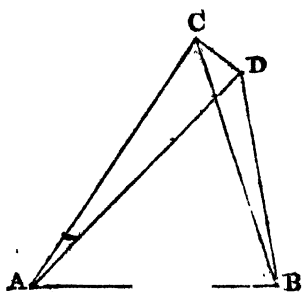
কখগ এক ত্রিভুজ তাহার মধ্যে কখগ এবং কগখ এই দুই কোণ পরস্পর সমান। অপর কখ এবং কগ দুই বাহুও সমান হইবে।

কেননা যদি বল কখ এবং কগ পরস্পর সমান নহে তবে ইহাদের একটী অন্যটী হইতে বৃহত্তর হইবে, কখ যেন বৃহত্তর জ্ঞান কর এবং (৩ প্রতিজ্ঞানুসারে) তাঁহা হইতে কগ লঘুতরের সমান এক অংশ ছেদ কর যথা খঘ, এবং ঘ, গ এক সরল রেখাতে সংযুক্ত কর অতএব ঘখগ এবং কখগ এই ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্যে

$\therefore \triangle$ DBC $= \triangle$ ACB (4. of 1) which is absurd (9 Ax.) $\therefore$ AB is not $\neq$ AC i. e. AB $=$ AC.

PROP. VII. THEOR.

Upon the same base, and on the same side of it, there cannot be two triangles, that have their sides which are terminated in one extremity of the base equal to one another, and likewise those which are terminated in the other extremity, equal to one another.

Let there be two triangles ABC, ADB, upon the same base AB, and upon the same side of it, which have their sides CA, DA, terminated in A equal to one another; then their sides CB, DB, terminated in B, cannot be equal to one another.

Join CD, and if possible let CB be equal to DB; then, in the case in which the vertex of each of the triangles is *without* the other triangle, because AC is equal to AD, the angle ACD is equal (5. 1.) to the angle ADC: But the angle ACD is greater than the angle BCD (Ax. 9.); therefore also, the angle ADC is greater than BCD; much more then is the angle BDC greater than the angle BCD. Again, because CB is equal to DB, the angle BDC is equal (5. 1.) to the angle BCD; but it has been demonstrated to be greater than it; which is impossible.

But if one of the vertices, as D, be *within* the other triangle ACB; produce AC, AD to E, F; therefore, because AC is equal to AD in the triangle ACD, the angles ECD, FDC upon the other side of the base CD are equal (5. 1.) to one another, but the angle ECD

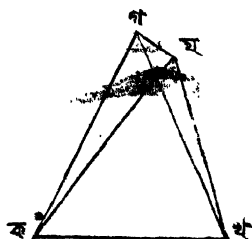
ঘখ এবং কগ পরস্পর সমান এবং খগ উভয়েরি এক বাহু সুতরাং ঘখ এবং খগ, কগ এবং খগ ইহারা একেং পরস্পর সমান এবং ইহাদের মধ্যবর্ত্তি কোণ দ্বয় অর্থাৎ ঘখগ এবং কগখ ইহারাও পরস্পর সমান অতএব (৪ প্রতিজ্ঞা) ঘগ এবং কখ ও পরস্পর সমান এবং ঘখগ ত্রিভুজ কগখ ত্রিভুজের সহিত সমান কিন্তু ঘখগ, কগখ ত্রিভুজের অংশ মাত্র হইয়া লঘুতর হইবে তবে পুর্ব্বোক্ত কল্পনাতে লঘুতর বৃহত্তরের সহিত সমান হইল তাহা অসাধ্য অতএব কখ, কগ হইতে বিষম নয় অর্থাৎ সমান। অতএব যদি কোন ত্রিভুজের, ইত্যাদি।

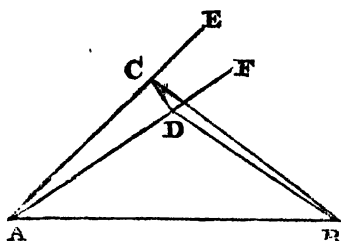
অনুমান। সুতরাং সমানকোণ ত্রিভুজ সমবাহুক ও হইবে।

সঙ্কেতে উপপত্তি। যদি ঘখ = কগ,। খগ, কখগ ও ঘখগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, ∠ ঘখগ = ∠ কগখ ∴ (৪ প্রতিজ্ঞানুসারে) △ ঘখগ = △ কখগ, তাহা অসাধ্য (৯স্বতঃ সাধ্য) ∴ কখ ≠ কগ নহে অর্থাৎ কখ = কগ।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক ভূমির উপরে এক পার্শ্বে এমত দুই ত্রিভুজ হইতে পারে না যে তাহাদের ভূমির একাগ্রে সংলগ্ন বাহুদ্বয় পরস্পর সমান সত্ত্বে ভূমির অন্যাগ্রে সংলগ্ন বাহুদ্বয়ও তদ্রূপ সমান হইবে।

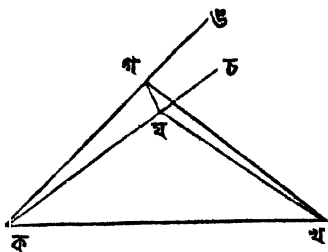
কখগ এবং কখঘ দুই ত্রিভুজ কখ ভূমির উপর একি পার্শ্বে কল্পনা কর তবে কগ এবং কঘ একাগ্রে অর্থাৎ খ বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া পরস্পর সমান থাকিলে খগ এবং খঘ অন্যাগ্রে অর্থাৎ গ বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া তদ্রূপ পরস্পর সমান হইতে পারে না।

যদি বল হইতে পারে তবে গ এবং ঘ সরল রেখাতে সংযুক্ত কর, এবং প্রথমতঃ যদি উক্ত ত্রিভুজের শৃঙ্গদ্বয় পরস্পরের ক্ষেত্রের বহিস্থ হয় তবে কগ এবং কঘ সমান হওয়াতে কগঘ এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইল সুতরাং কগঘ এবং কঘগ এই কোণ দ্বয় (৫ প্রতিজ্ঞানুসারে) পরস্পর সমান, কিন্তু খগঘ, কগঘ কোণের অংশ মাত্র হওয়াতে তাহা হইতে লঘুতর অতএব

is greater than the angle BCD (Ax. 9).; wherefore, the angle FDC is likewise greater than BCD; much more then is the angle BDC greater than the angle BCD. Again, because CB is equal to DB, the angle BDC is equal (5. 1.) to the angle BCD; but BDC has been proved to be greater than the same BCD; which is impossible. The case in which the vertex of one triangle is upon a side of the other, needs no demonstration.

Therefore, *upon the same base, and on the same side of it, there cannot be two triangles that have their sides which are terminated in one extremity of the base equal to one another, and likewise those which are terminated in the other extremity equal to one another.* Q. E. D.

Sym. dem.—First case. $\angle$ ACD $=$ $\angle$ ADC $\because$ AC $=$ AD (5. of 1.) $\angle$ ACD $>$ $\angle$ BCD (9. Ax.) $\therefore$ ADC $>$ $\angle$ BCD; $\angle$ BDC $>$ $\angle$ ADC (9. Ax.) $\therefore$ $\angle$ BDC $>$ $\angle$ BCD. But if BC $=$ BD, then $\angle$ BDC $=$ $\angle$ BCD (5. of 1.) which is absurd $\therefore$ BC $\neq$ BD.

Sym dem.—Second case. If AC $=$ AD, $\angle$ ECD $=$ $\angle$ CDF (5 of 1.) $\angle$ ECD $>$ BCD (9 Ax.) $\therefore$ $\angle$ CDF $>$ $\angle$ BDC; $\angle$ BDC $>$ CDF (9 Ax.) $\therefore$ $\angle$ BDC $>$ BCD. But if BD $=$ BC, $\angle$ BDC $=$ $\angle$ BCD which is absurd $\therefore$ BD $\neq$ BC.

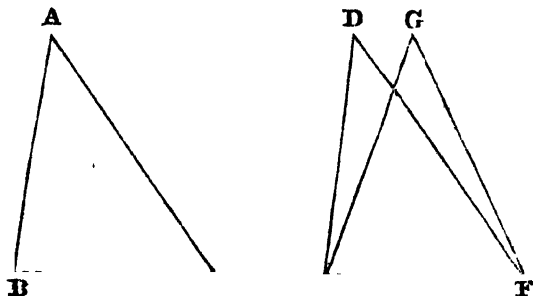
খগঘ, কঘগ হইতেও লঘুতর এবং কঘগ হইতে খঘগ বৃহত্তর হওয়াতে খগঘ, খঘগ হইতে আরো অধিক লঘুতর কিন্তু খগ এবং খঘ পরস্পর সমান অতএব খগঘ এবং খঘগ (৫ প্রতিজ্ঞা) পরস্পর সমান হইবে। ইহা অসাধ্য। সুতরাং কগ, কঘ সমান সত্ত্বে খগ, খঘ সমান হইবে না।

দ্বিতীয়তঃ। উক্ত ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্যে যদি একটীর শৃঙ্গ অন্যের মধ্যবর্ত্তি হয় যেমত এই আকৃতিতে আছে তবে গ এবং ঘ সরল রেখাতে সংযুক্ত কর এবং কগ ও কঘ, ঙ এবং চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। যদি কগ, কঘ সমান তবে কগঘ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সুতরাং ভূমির অপর পার্শ্বস্থ কোণদ্বয় অর্থাৎ ঘগঙ এবং গঘচ পরস্পর সমান কিন্তু ঘগঙ, খগঘ হইতে বৃহত্তর সুতরাং গঘচ কোণও খগঘ হইতে বৃহত্তর তবে গঘখ, খগঘ হইতে আরো বৃহত্তর. কিন্তু খঘ এবং খগ যদি পরস্পর সমান হয় তবে খগঘ এবং খঘগ পরস্পর সমান, ইহা অসাধ্য, অতএব খঘ এবং খগ পরস্পর সমান নহে। যদি একটী ত্রিভুজের শৃঙ্গ অন্যটীর পার্শ্বের উপর থাকে তবে প্রতিজ্ঞার উপপত্তি অতি স্পষ্ট। অতএব এক ভূমির উপরে, ইত্যাদি।

সঙ্কেতে উপপত্তি। ১ প্রকরণ। $\angle$কগঘ = $\angle$কঘগ $\because$ কগ = কঘ। $\angle$কগঘ $\urcorner$ $\angle$খগঘ (৯ স্বতঃসাধ্য) $\therefore$ কঘগ $\urcorner$ খগঘ। $\angle$খঘগ $\urcorner$ $\angle$কঘগ $\therefore$ $\angle$খঘগ $\urcorner$ $\angle$খগঘ। কিন্তু যদি খগ = খঘ, তবে $\angle$খঘগ = $\angle$খগঘ। ইহা অসাধ্য, $\therefore$ খগ $\neq$ খঘ।

২ প্রকরণ। কগ = কঘ $\therefore$ $\angle$ঙগঘ = $\angle$গঘচ (৫ প্রতিজ্ঞা) $\angle$ঙগঘ $\urcorner$ খগঘ $\therefore$ $\angle$গঘচ $\urcorner$ খগঘ। $\therefore$ $\angle$গঘখ $\urcorner$ $\angle$খগঘ। কিন্তু খঘ = খগ হইলে $\angle$খঘগ = খগঘ। ইহা অসাধ্য, $\therefore$ খঘ $\neq$ খগ।

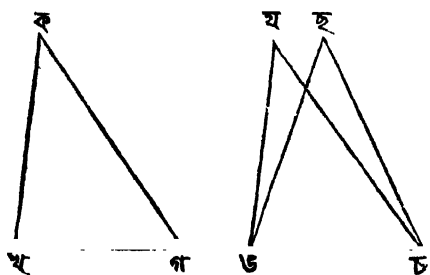
PROP. VIII. THEOR.

If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, and have likewise their bases equal; the angle which is contained by the two sides of the one is equal to the angle contained by the two sides of the other.

Let ABC, DEF, be two triangles having the two sides AB, AC, equal to the two sides DE, DF, each to each, viz. AB to DE, and AC to DF; and also the base BC equal to the base EF. The angle BAC is equal to the angle DEF.

For, if the triangle ABC be applied to the triangle DEF, so that the point B be on E, and the straight line BC upon EF: the point C must also coincide with the point F, because BC is equal to EF; therefore BC coinciding with EF, BA and AC must coincide with ED, and DF; for, if BA and CA do not coincide with ED, and FD, but have a different situation as EG and FG; then, upon the same base EF, and upon the same side of it, there can be two triangles EDF, EGF, that have their sides which are terminated in one extremity of the base equal to one another, and likewise their sides terminated in the other extremity; but this is impossible (7. 1.); therefore, if the base BC coincide with the base EF, the sides BA, AC cannot but

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটীর দুই বাহু অন্যের দুইবাহুর সহিত পরস্পর সমান হয় এবং তাহাদের ভূমিও যদি পরস্পর সমান হয় তবে উভয় ত্রিভুজে ঐ বাহু দ্বয়ের মধ্যগত কোণও পরস্পর সমান হইবে।

কখগ ও ঘঙচ দুই ত্রিভুজ, তাহার মধ্যে একটীর কখ ও কগ এই দুই বাহু অন্যের ঘঙ ও ঘচ এই দুই বাহুর সহিত পরস্পর প্রত্যেকে সমান, অর্থাৎ কখ ও ঘঙ পরস্পর সমান এবং কগ ও ঘচ পরস্পর সমান এবং ইহাদের খগ ও ঙচ দুই ভূমিও পরস্পর সমান অতএব খকগ এই কোণ ঙঘচ এই কোণের সহিত সমান হইবে।

উপপত্তি। যদি কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের উপর এমত করিয়া রাখ যে খ বিন্দু ঠিক ঙ বিন্দুর উপরে পড়ে এবং খগ রেখা ঠিক ঙচ রেখার উপরে পড়ে তবে গ বিন্দুও চ বিন্দুর উপর পড়িবে কেননা কগ, ঘচ সহিত সমান, অতএব খগ ভূমি ঙচ ভূমির সহিত মিলিলে কখ, ঘঙ সহিত এবং কগ, ঘচ সহিত অবশ্য মিলিবে, কেননা খগ ভূমি ঙচ ভূমির সহিত মিলিলে যদি কখ, ঘঙ সহিত এবং কগ, ঘচ সহিত না মিলিয়া ছঙ ও ছচ ন্যায় অন্য প্রকারে অবস্থিতি করে তবে এক ভূমি যে ঙচ তাহার উপরে এবং এক দিকে এমত দুই ত্রিভুজ হইতে পারে যাহাদের একাগ্রে সংলগ্ন বাহুদ্বয় পরস্পর সমান সত্ত্বে অন্যাগ্রে সংলগ্ন বাহুদ্বয়ও তদ্রূপ সমান হইবে কিন্তু তাহা (৭ প্রতিজ্ঞানুসারে) অসাধ্য, অতএব খগ ভূমি ঙচ ভূমির সহিত মিলিলে কখ এবং কগ প্রত্যেকে ঘঙ ও ঘচ সহিত

coincide with the sides ED, DF; wherefore likewise, the angle BAC coincides with the angle EDF, and is equal (8. Ax.) to it. Therefore, *if two triangles, &c.* Q. E. D.

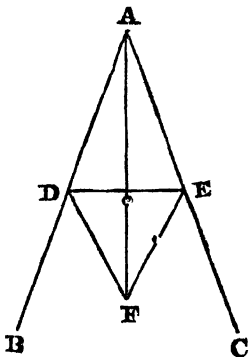
Sym. dem. ∵ B coincides with E and BC with EF ∴ C coincides with F ∵ BC = EF; AB and AC shall coincide with DE and DF for (by 7 of 1.) it cannot be otherwise ∴ ∠ BAC = ∠ EDF.

PROP. IX. PROB.

To bisect a given rectilineal angle, that is, to divide it into two equal angles.

Let BAC be the given rectilineal angle, it is required to bisect it.

Take any point D in AB, and from AC cut (3. 1.) off AE equal to AD; join DE, and upon it describe (1. 1.) an equilateral triangle DEF; then join AF; the straight line AF bisects the angle BAC.

Because AD is equal to AE, and AF is common to the two triangles DAF, EAF; the two sides DA AF, are equal to the two sides EA AF, each to each; but the base DF is also equal to the base EF; therefore the angle DAF is equal (8. 1.) to the angle EAF: wherefore, *the given rectilineal angle* BAC *is bisected by the straight line* AF. Which was to be done.

Sym. dem. AD = AE (by constr.) AF common to △s ADF, AEF and DF = EF ∴ ∠ DAF = ∠ FAE (8 of 1.)

অবশ্য পরস্পর মিলিবে এবং তন্নিমিত্তে খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সহিত মিলিয়া সমান হইবে। অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে, ইত্যাদি।

সঙ্কেতে উপপত্তি। ∵ খ, ঙ সহিত মিলে এবং খগ, ঙচ সহিত মিলে ∴ গ, চ সহিত মিলিবে, ∵ খগ = ঙচ। কখ ও কগ, ঘঙ ও ঘচ সহিত মিলিবে কেননা (৭ প্রতিজ্ঞা) তাহার অন্যথা হইতে পারে না। ∴ ∠ খকগ = ∠ ঙঘচ।

৯ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণকে দ্বিখণ্ড অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

খকগ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ ইহাকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে। কখ সরল রেখার মধ্যে কোন এক বিন্দু লও অর্থাৎ ঘ, এবং কগ হইতে কঘ সমান এক অংশ (৩ প্রতিজ্ঞানুসারে) ছেদন কর যথা কঙ, পরে ঘ এবং ঙ সরল রেখার দ্বারা সংযুক্ত কর এবং ঘঙ রেখার উপর (১ প্রতিজ্ঞানুসারে) এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যথা ঘঙচ, পরে ক, চ সরল রেখার দ্বারা সংযুক্ত কর। খকগ কোণ কচ সরল রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত হইল।

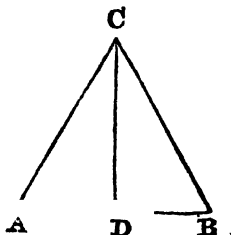
উপপত্তি। কঘ, কঙ সহিত সমান যে হেতুক তাহারা সমান ভাবে ছিন্ন হইয়াছে এবং কচ সরল রেখা ঘকচ ও ঙকচ এই দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু অতএব ঘক ও কচ ইহারা উভয়ে পরস্পর প্রত্যেকে ঙক ও কচ সহিত সমান এবং ঘচ ভূমি ঙচ ভূমির সহিত সমান অতএব (৮ প্রতিজ্ঞানুসারে) ঘকচ কোণ ঙকচ কোণের সহিত সমান, সুতরাং কচ সরল রেখা দ্বারা খকগ কোণ দ্বিখণ্ড হইয়াছে।

PROP. X. PROB.

To bisect a given finite straight line, that is, to divide it into two equal parts.

Let AB be the given straight line; it is required to divide it into two equal parts.

Describe (1. 1.) upon it an equilateral triangle ABC, and bisect (9. 1.) the angle ACB by the straight line CD. AB is cut into two equal parts in the point D.

Because AC is equal to CB, and CD common to the two triangles ACD, BCD; the two sides AC, CD, are equal to the two BC, CD, each to each; but the angle ACD is also equal to the angle BCD; therefore the base AD is equal to the base (4. 1.) DB, and *the straight line* AB, *is divided into two equal parts in the point* D. Which was to be done.

Sym. dem. AC = CB, CD common to $\triangle$s ADC, BDC, $\angle$ ACD = $\angle$ BCD (by constr.) $\therefore$ AD = DB (4 of 1.)

PROP. XI. PROB.

To draw a straight line at right angles to a given straight line, from a given point in that line.

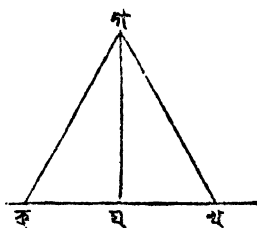
Let AB be a given straight line, and C a point given in it; it is required to draw a straight line from the point C at right angles to AB.

Take any point D in AC, and (3. 1.) make CE equal to CD and upon DE describe (1. 1.) the equilateral triangle DFE, and join FC; the straight line FC, drawn from the given point C, is at right angles to the given straight line AB.

সঙ্কেতে উপপত্তি। কঘ = কঙ। কচ, $\triangle$ কঘচ ও কঙচ উভয়ের সামান্য বাহু। ঘচ = ঙচ, $\therefore$ $\angle$ ঘকচ = $\angle$ চকঙ (৮ প্রতিজ্ঞা)।

১০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সীমা বিশিষ্ট সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

কখ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ইহাকে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

উক্ত সরল রেখার উপর (১ প্রতিজ্ঞা) এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং (৯ প্রতিজ্ঞা) কগখ কোণকে গঘ সরল রেখার দ্বারা দ্বিখণ্ড কর, ঘ বিন্দুতে কখ দুই সমান ভাগে বিভক্ত হইল।

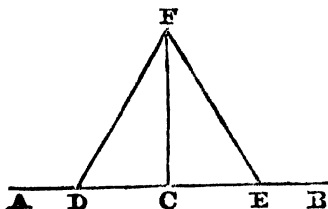
উপপত্তি। কগ ও গখ পরস্পর সমান, যেহেতুক ইহারা সমবাহু ত্রিভুজের বাহু, এবং গঘ সরল রেখা কগঘ ও খগঘ ত্রিভুজ দ্বয়ের সামান্য বাহু অতএব কগ ও গঘ দুই বাহু খগ ও গঘ দুই বাহুর সহিত পরস্পর, প্রত্যেকে সমান এবং কগঘ ও খগঘ এই দুই কোণ পরস্পর সমান অতএব (৪ প্রতিজ্ঞা) কঘ ভূমি ঘখ ভূমির সহিত সমান সুতরাং ঘ বিন্দুতে কখ রেখা দুই সমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

সঙ্কেতে উপপত্তি। কগ = গখ। গঘ, $\triangle$ কগঘ ও খগঘর সামান্য বাহু। $\angle$ কগঘ = $\angle$ খগঘ (অঙ্কপাত) $\therefore$ কঘ = ঘখ।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর তাহার অন্তরস্থ কোন বিন্দু হইতে লম্ব টানিতে হইবে।

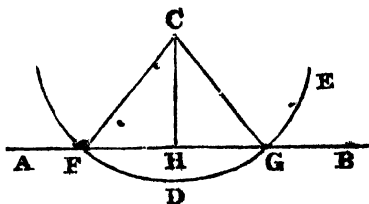
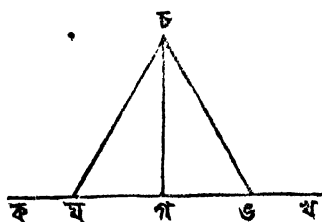
কখ এক সরল রেখা এবং গ তাহার অন্তরস্থ এক বিন্দু, গ হইতে কখ রেখার উপর এক লম্ব টানিতে হইবে।

Because DC is equal to CE, and FC is common to the two triangles DCF, ECF, the two sides DC, CF are equal to the two EC, CF, each to each; but the base DF is also equal to the base EF; therefore the angle DCF is equal (8. 1.) to the angle ECF; and they are adjacent angles. But, when the adjacent angles which one straight line makes with another straight line are equal to one another, each of them is called a right (7 Def.) angle; therefore each of the angles DCF, ECF is a right angle. Wherefore, *from the given point* C, *in the given straight line* AB, FC *has been drawn at right angles to* AB. Which was to be done.

Sym. dem. DC = CE; FC common to △s FCD, FCE; DF = FE (by constr.) ∴ ∠ FCD = ∠ FCE (8 of 1.) ∴ FC ⊥ to AB (7 Def.)

PROP. XII. PROB.

To draw a straight line perpendicular to a given straight line, of an unlimited length, from a given point without it.

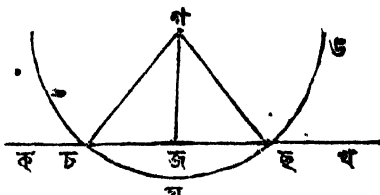
Let AB be a given straight line, which may be produced to any length both ways, and let C be a point without it. It is required to draw a straight line perpendicular to AB from the point C.

Take any point D upon the other side of AB, and from the centre C, at the distance CD, describe (3 Post.) the circle EGF meeting AB in F,

কগ মধ্যে কোন এক বিন্দু লও যথা ঘ, এবং গখ হইতে গঘ সমান এক অংশ (৩ প্রতিজ্ঞা) ছেদ কর যথা গঙ এবং ঘঙ রেখার উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ (১ প্রতিজ্ঞা) অঙ্কিত কর যথা ঘচঙ পরে চ ও গ এক সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত কর। চগ সরল রেখা গ বিন্দু হইতে উঠিয়া কখ উপর লম্ব ভাবে আছে।

উপপত্তি। ঘগ ও গঙ পরস্পর সমান এবং চগ, ঘচগ ও ঙচগ এই দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু অতএব ঘগ ও গচ, ঙগ ও গচ সহিত পরস্পর প্রত্যেক সমান এবং ঘচ ভূমিও ঙচ ভূমির সহিত সমান অতএব (৮ প্রতিজ্ঞা) ঘগচ এবং ঙগচ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান, ইহারাই চগ সরল রেখার দুই পার্শ্বস্থ কোণ, অপর এক সরল রেখার উপর অন্য সরল রেখা যোগে উভয় পার্শ্বস্থ কোণ সমান হইলে প্রত্যেকাকে সমকোণ কহে অতএব ঘগচ এবং ঙগচ প্রত্যেকে সমকোণ সুতরাং গ বিন্দু হইতে কখ রেখার উপর গচ, লম্বভাবে অঙ্কিত হইয়াছে।

সঙ্কেতে উপপত্তি। ঘগ $=$ গঙ। চগ, $\triangle$-ঘগচ ও ঙগচ উভয়ের সামান্য। ঘচ $=$ ঙচ $\therefore$ $\angle$চগঘ $=$ $\angle$চগঙ, $\therefore$ গচ, কখ উপর $\perp$ (৭ সংজ্ঞা)।

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট অসীমা সরল রেখার উপর তদ্বহিঃস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে লম্ব টানিতে হইবে।

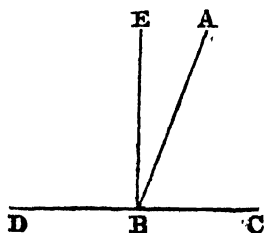
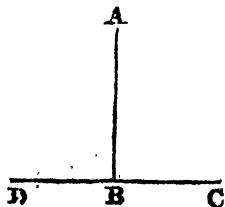
কখ এক নির্দ্দিষ্ট অসীমা সরল রেখা অর্থাৎ ইহাকে উভয় পার্শ্বে যত ইচ্ছা বৃদ্ধি করা যাইতে পারে এবং গ ইহার

G; and bisect (10. 1.) FG in H, and join CF, CH, CG; the straight line CH, drawn from the given point C, is perpendicular to the given straight line AB.

Because FH is equal to HG, and HC is common to the two triangles FHC, GHC, the two sides FH, HC are equal to the two GH, HC, each to each; but the base CF is also equal (11. Def. 1.) to the base CG; therefore the angle CHF is equal (8. 1.) to the angle CHG; and they are adjacent angles; now, when a straight line standing on a straight line makes the adjacent angles equal to one another, each of them is a right angle, and the straight line which stands upon the other is called a perpendicular to it; therefore *from the given point* C, *a perpendicular* CH *has been drawn to the given straight line* AB. Which was to be done.

Sym. dem. FH $=$ HG (by constr.) CH common to $\triangle$s FCH, GCH; FC $=$ CG (11. Def.) $\therefore \angle$ CHF $= \angle$ CHG $\therefore$ CH $\perp$ to AB (7 Def.)

PROP. XIII. THEOR.

The angles which one straight line makes with another, upon one side of it, are either two right angles, or are together equal to two right angles.

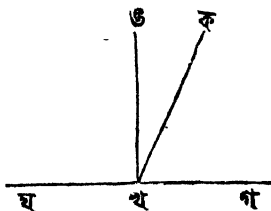
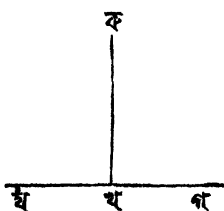
Let the straight line AB make with CD, upon one side of it, the angles CBA, ABD; these are either two right angles, or are together equal to two right angles.

বহিঃস্থ এক বিন্দু, গ হইতে কখ রেখার উপর লম্ব টানিতে হইবে।

কখ সরল রেখার অপর পার্শ্বে এক বিন্দু লও যথা ঘ, এবং গ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া গঘ পর্য্যন্ত বৃত্ত অঙ্কিত কর যথা চছঙ, ইহা কখ সরল রেখার সহিত চ এবং ছ বিন্দুতে সংলগ্ন হইতেছে পরে চছ সরল রেখাকে জ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ও গছ, গজ, এবং গচ এই২ রেখা টান। গজ, গ বিন্দু হইতে কখ রেখার উপর লম্বভাবে অঙ্কিত হইল।

উপপত্তি। চজ, জছ সহিত সমান এবং জগ, চজগ ও ছজগ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু সুতরাং চজ ও জগ, ছজ ও জগ ইহারা ক্রমশ সমান এবং (১১ সংজ্ঞা) চগ ভূমিও ছগ ভূমির তুল্য অতএব (৮ প্রতিজ্ঞা) চজগ কোণ ছজগ কোণের সহিত সমান, ইহারাই গজ রেখার দুই পার্শ্বস্থ কোণ এবং এক সরল রেখা অন্য সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইয়া উভয় পার্শ্বস্থ কোণ সমান করিলে প্রত্যেক কোণকে সমকোণ কহে ও দণ্ডায়মান রেখাকে লম্ব কহে অতএব নির্দ্দিষ্ট কখ রেখার উপর গ বিন্দু হইতে গজ লম্ব ভাবে টানা গিয়াছে।

সঙ্কেতে উপপত্তি। চজ $=$ জছ। জগ, $\triangle$ গজচ, গজছ উভয়ের সামান্য। চগ $=$ ছগ। $\therefore$ $\angle$চজগ $=$ $\angle$ছজগ $\therefore$ গজ, কখ উপর $\perp$ (৭ সংজ্ঞা)।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সরল রেখা অন্য সরল রেখার সহিত সংলগ্ন হইয়া এক দিকে যে২ কোণ বিস্তার করে তাহা দুই সম কোণ অথবা একত্র সমুচ্চয়ে দুই সম কোণের সমান হয়।

For, if the angle CBA be equal to ABD, each of them is a right angle (Def. 7.); but, if not, from the point, B draw BE at right angles (11. 1.) to CD; therefore the angles CBE, EBD are two right angles. Now, the angle CBE is equal to the two angles CBA, ABE together; add the angle EBD to each of these equals, and the two angles CBE, EBD, will be equal (2 Ax.) to the three angles CBA, ABE, EBD. Again, the angle DBA is equal to the two angles DBE, EBA; add to each of these equals the angle ABC; then will the two angles DBA, ABC be equal to the three angles DBE, EBA, ABC; but the angles CBE, EBD have been demonstrated to be equal to the same three angles; and things that are equal to the same thing are equal (1 Ax.) to one another; therefore the angles CBE, EBD, are equal to the angles DBA, ABC; but CBE, EBD, are two right angles; therefore DBA, ABC are together equal to two right angles. Wherefore, *when a straight line, &c* Q. E. D.

Sym dem. $\angle$ CBE = $\angle$ CBA + $\angle$ ABE $\because$ $\angle$ CBE + $\angle$EBD = $\angle$ CBA + $\angle$ ABE + $\angle$ EBD (2. Ax.) $\angle$ DBA = $\angle$ ABE + $\angle$ EBD $\therefore$ $\angle$DBA + $\angle$ ABC = $\angle$ ABC + $\angle$ ABE + $\angle$ EBD = $\angle$ CBE + $\angle$ EBD = 2 Rt. $\angle$s.

PROP. XIV. THEOR.

If, at a point in a straight line, two other straight lines, upon the opposite sides of it make the adjacent angles together equal to two right angles, these two straight lines are one and the same straight line.

At the point B in the straight line AB, let the two straight lines BC, BD upon the opposite sides of AB, make the adjacent angles ABC, ABD together equal to two right angles. BD is in the same straight line with CB.

For, if BD be not in the same straight line with CB, let BE be in the same straight line with it;

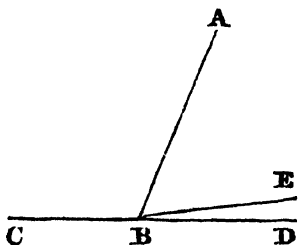
কখ সরল রেখা গঘ সরল রেখার সহিত এক দিকে দুই কোণ বিস্তার করুক যথা কখগ এবং কখঘ, ইহারা দুই সম কোণ অথবা একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

উপপত্তি। যদি কখগ কোণ কখঘ কোণের সমান হয় তবে (৭ সং) ইহারা প্রত্যেকে সম কোণ, আর যদি তাহা না হয় তবে খ বিন্দু হইতে গঘ সরল রেখার উপর (১১ প্র.) এক লম্ব টান যথা খঙ, অতএব ঙখঘ ও ঙখগ ইহারা দুই সমকোণ, অপর ঙখগ কোণ কখগ এবং কখঙ এ উভয়ের সমান, তবে এই দুই তুল্য পদার্থে ঙখঘ যোগ করিলে ঙখগ এবং ঙখঘ এই দুই কোণ (২ স্ব. সা.) কখগ কখঙ এবং ঙখঘ এই তিন কোণের সমান, এবং ঘখক কোণ, ঘখঙ এবং ঙখক এই দুই কোণের সমান অতএব এই তুল্য পদার্থে কখগ যোগ করিলে ঘখক এবং কখগ এই দুই কোণ ঘখঙ ঙখক এবং কখগ এই তিন কোণের সমান হইবে, কিন্তু পূর্ব্বে উপপন্ন হইয়াছে যে ঙখগ এবং ঙখঘ এই দুই কোণ উক্ত তিন কোণের সমান, অতএব (১ স্ব. সা.) যে২ বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান তাহারা পরস্পর সমান সুতরাং ঙখগ এবং ঙখঘ এই কোণ দ্বয় ঘখক এবং কখগ এ কোণ দ্বয়ের সহিত সমান, কিন্তু ঙখগ এবং ঙখঘ ইহারা দুই সম কোণ অতএব ঘখক এবং কখগ ইহারা একত্র দুই সম কোণের সমান। অতএব এক সরল রেখা, ইত্যাদি।

সং উ.। ∠গখঙ = ∠গখক + ∠কখঙ। ∴ ∠গখঙ + ∠ঙখঘ = ∠গখক + ∠কখঙ + ∠ঙখঘ (২ স্ব. সা.) ∠ঘখক = ∠কখঙ + ∠ঙখঘ ∴ ∠ঘখক + ∠কখগ = ∠কখগ + ∠কখঙ + ∠ঙখঘ = ∠গখঙ + ∠ঙখঘ = ২ সমকোণ।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক সরল রেখার কোন বিন্দুতে অন্য দুই সরল রেখা ভিন্ন২ পার্শ্ব হইতে আসিয়া সমীপস্থ কোণ দ্বয়কে একত্র দুই সম কোণের সমান করে তবে এই দুই সরল রেখা একি সরল রেখাতে থাকিবে।

therefore, because the straight line AB makes angles with the straight line CBE, upon one side of it, the angles ABC, ABE are together equal (13. 1.) to two right angles; but the angles ABC ABD are likewise together equal to two right angles; therefore the angles CBA, ABE are equal to the angles CBA, ABD: Take away the common angle ABC, and the remaining angle ABE is equal (3 Ax.) to the remaining angle ABD, the less to the greater, which is impossible; therefore BE is not in the same straight line with BC. And in like manner, it may be demonstrated, that no other can be in the same straight line with it but BD, which, therefore, is in the same straight line with CB. Wherefore, *if at a point in a straight line, two other straight lines, upon the opposite sides of it, make the adjacent angles together equal to two right angles, these two straight lines are in one and the same straight line.* Q. E. D.

Sym. dem. If CB be not in the same line with BD let it be so with BE.

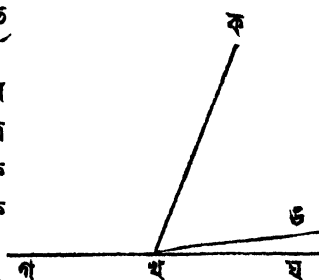
$\therefore \angle CBA + \angle ABE = 2$ Rt. $\angle$s (13. of 1.)

$\angle CBA + \angle ABD = 2$ Rt. $\angle$s (by Hyp.)

$\therefore \angle CBA + \angle ABE = \angle CBA + \angle ABD$ (1. Ax.)

$\therefore \angle ABE = \angle ABD$ which is absurd (9. Ax.)

$\therefore$ CB is not in the same line with BE, nor with any other but BD.

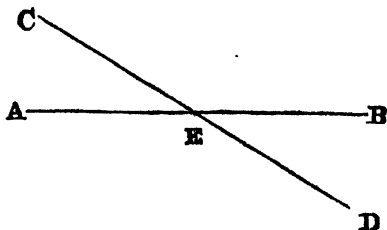
কখ সরল রেখার খ বিন্দুতে খগ এবং খঘ ভিন্ন২ পার্শ্ব হইতে আসিয়া কখগ ও কখঘ এই সমীপস্থ কোণ দ্বয়কে একত্র দুই সম কোণের সমান করুক তাহাতে খঘ এবং খগ এক সরল রেখাতেই থাকিবে।

উপপত্তি। যদি খঘ এবং খগ একি সরল রেখাতে না থাকে তবে খগ রেখাকে বৃদ্ধি করিয়া খঙ সহিত এক সরল রেখা কর, অতএব কখ গখঙ রেখার উপর একি পার্শ্বে দুই কোণ বিস্তার করাতে (১৩ প্র.) কখগ এবং কখঙ এই কোণ দ্বয় একত্র দুই সম কোণের সহিত সমান, কিন্তু কখগ এবং কখঘ ইহারাও দুই সম কোণের সহিত সমান অতএব গখক এবং কখঙ একত্র গখক এবং কখঘ সহিত সমান, ইহাদের মধ্যে সামান্য কোণ গখক যদি বাহির করিয়া লও তবে (৩ স্ব. সা.) অবশিষ্ট কখঙ এবং কখঘ পরস্পর সমান হইবে, কিন্তু কখঙ, কখঘ এই কোণের এক অংশ মাত্র সুতরাং তাহা হইতে (৯ স্ব. সা.) লঘু অতএব লঘু এবং গুরু পরস্পর সমান হইতে পারেনা সুতরাং খঙ এবং গখ এক সরল রেখা হইতে পারে না। এই রূপে আরো উপপন্ন হইতে পারে যে খঘ ব্যতিরিক্ত অন্য কোন রেখা খগ সহিত একি সরল রেখা হইতে পারেনা অতএব এই দুই রেখা একি সরল রেখাতে আছে। এই হেতুক যদি এক সরল রেখার, ইত্যাদি।

সং উ.। যদি গখ, খঘ এক সরল রেখা না হয় তবে গখ, খঙ তাহা হউক। ∴ ∠গখক + ∠কখঙ = ২ সমকোণ (১৩ প্র.) ∠গখক + ∠কখঘ = ২ সম কোণ (কল্পনা) ∴ ∠গখক + ∠কখঙ = ∠গখক + ∠কখঘ ∴ ∠কখঙ = ∠কখঘ, ইহা অসাধ্য (৯ স্ব. সা.)।

PROP. XV. THEOR.

If two straight lines cut one another, the vertical or opposite angles are equal.

Let the two straight lines AB, CD, cut one another in the point E; the angle AEC shall be equal to the angle DEB, and CEB to AED.

For the angles CEA, AED, which the straight line AE makes with the straight line CD, are together equal (13. 1.) to two right angles: and the angles AED, DEB, which the straight line DE makes with the straight line AB are also together equal (13. 1.) to two right angles:

therefore the two angles CEA, AED are equal to the two AED, DEB. Take away the common angle AED, and the remaining angle CEA is equal (3. Ax) to the remaining angle DEB. In the same manner, it may be demonstrated, that the angles CEB, AED are equal. Therefore, *If two straight lines, &c.* Q. E. D.

Cor. 1. From this it is manifest, that, *if two straight lines cut one another, the angles which they make at the point of their intersection, are together equal to four right angles.*

Cor. 2. And hence, *all the angles made by any number of straight lines meeting in one point, are together equal to four right angles.*

Sym. dem. $\angle AEC + \angle AED = 2$ Rt. $\angle$s (13. of 1.) $\angle BED + \angle AED = 2.$ Rt. $\angle$s (13. of 1.) $\therefore$ $\angle AEC + \angle AED = \angle BED + \angle AED$ (1. Ax.) $\therefore$ $\angle AEC = \angle BED$ (3. Ax.)

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার সম্পাতে সম্মুখস্থ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান।

কখ এবং গঘ এই দুই সরল রেখার সম্পাত ও চিহ্নে হউক তবে কঙগ এই কোণ ঘঙখ এই কোণের সহিত সমান হইবে এবং গঙখ ও কঙঘ ইহারাও পরস্পর সমান হইবে।

উপপত্তি। কঙ সরল রেখা গঘ রেখার সহিত যোগে যে দুই কোণ বিস্তার করিতেছে অর্থাৎ গঙক এবং কঙঘ ইহারা (১৩ প্র.) একত্র দুই সমকোণ তুল্য, এবং ঘঙ রেখা কখ সহিত যে দুই কোণ বিস্তার করিতেছে অর্থাৎ কঙঘ এবং ঘঙখ ইহারাও দুই সমকোণ তুল্য, অতএব গঙক এবং কঙঘ এই কোণ দ্বয় একত্র কঙঘ এবং ঘঙখ সহিত সমান সুতরাং উভয় পক্ষ হইতে কঙঘ বাহির করিলে অবশিষ্ট গঙক এবং ঘঙখ পরস্পর সমান হইবে। গঙখ এবং কঙঘ যে পরস্পর সমান ইহাও ঐ রূপে উপপন্ন হইতে পারে। অতএব দুই সরল রেখার সম্পাত হইলে, ইত্যাদি।

১ অনুমান। ইহাতে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে দুই সরল রেখা পরস্পর অবচ্ছিন্ন করিলে অবচ্ছেদ চিহ্নেতে যে২ কোণের উৎপত্তি হয় তাহা একত্র যোগে চারি সমকোণ তুল্য হয়।

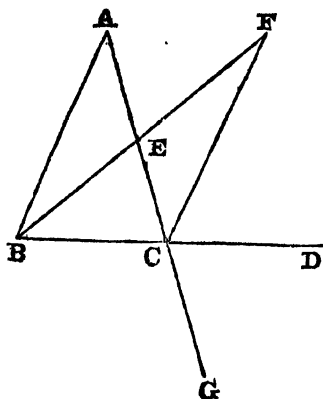
২ অনুমান। অতএব যত সরল রেখা পরস্পর এক চিহ্নে অবচ্ছিন্ন হয় তাহাতে যে২ কোণ উৎপন্ন হয় সকল একত্র করিলে চারি সমকোণ তুল্য হইবে।

সং উ.। ∠কঙগ + ∠কঙঘ = ২ সমকোণ (১৩ প্র.) ∠খঙঘ + ∠কঙঘ = ২ সমকোণ, ∵ ∠কঙগ + ∠কঙঘ = ∠খঙঘ + ∠কঙঘ ∴ ∠কঙগ = ∠খঙঘ (৩ স্ব. সা.।

PROP. XVI. THEOR.

If one side of a triangle is produced, the exterior angle is greater than either of the interior opposite angles.

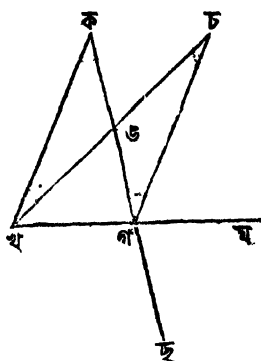
Let ABC be a triangle, and let its side BC be produced to D, the exterior angle ACD is greater than either of the interior opposite angles CBA, BAC.

Bisect (10. 1.) AC in E, join BE and produce it to F, and make EF equal to BE; join also FC, and produce AC to G.

Because AE is equal to EC, and BE to EF; AE, EB are equal to CE, EF, each to each; and the angle AEB is equal (15. 1.) to the angle CEF, because they are vertical angles; therefore the base AB is equal (4. 1.) to the base CF, and the triangle AEB to the triangle CEF, and the remaining angles each to each, to which the equal sides are opposite; wherefore the angle BAE is equal to the angle ECF; but the angle ECD, is greater than the angle ECF (Ax. 9.); therefore the angle ECD, that is ACD, is greater than BAE. In the same manner, if the side BC be bisected, it may be demonstrated that the angle BCG, that is (15. 1.), the angle ACD, is greater than the angle ABC. Therefore, *if one side, &c.* Q, E. D.

Sym. dem. BE $=$ EF, AE $=$ EC (by constr.) $\angle$BEA $=$ $\angle$FEC $\therefore$ $\angle$ECF $=$ $\angle$BAE (4. of 1.) $\angle$ECD or ACD $>$ $\angle$ECF (9. Ax.) $\therefore$ $\angle$ ACD $>$ $\angle$ BAE or BAC.

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন বাহু বৃদ্ধি করিলে বহিস্থ কোণ সম্মুখস্থ অন্তর্ব্বর্ত্তি প্রত্যেক কোণ হইতে বৃহৎ হইবে।

কখগ এক ত্রিভুজ, ইহার খগ বাহু ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাউক তবে কগঘ বহিস্থ কোণ গখক এবং খকগ সম্মুখস্থ অন্তর্বর্ত্তি কোণ দ্বয়ের প্রত্যেক হইতে বৃহৎ হইবে।

কগ (১০ প্র.) ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর পরে খ ঙ সংযুক্ত কর এবং খঙ রেখা চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া ঙচ রেখা খঙ সমান কর অনন্তর চ গ সংযুক্ত কর এবং কগ ছ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর।

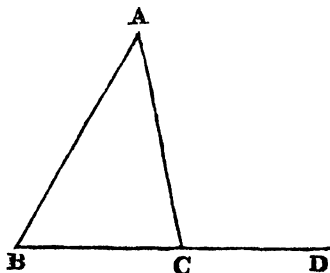
খঙ ঙচ পরস্পর সমান এবং কঙ ঙগ পরস্পর সমান সুতরাং কঙ ঙখ এবং গঙ ঙচ ইহারা ক্রমে২ পরস্পর সমান এবং কঙখ কোণ (১৫ প্র.) গঙচ কোণের তুল্য অতএব (৪ প্র.) কখ ভূমি গচ ভূমির সমান এবং কঙখ ত্রিভুজ গঙচ ত্রিভুজের সমান এবং ইহাদের সমান২ বাহুর সম্মুখস্থ অবশিষ্ট কোণ দ্বয় পরস্পর একে২ সমান, সুতরাং খকঙ কোণ ঙগচ কোণের সহিত সমান কিন্তু ঙগঘ কোণ ঙগচ কোণ হইতে বৃহৎ সুতরাং ঙগঘ অর্থাৎ কগঘ কোণ খকঙ হইতে বৃহৎ। এই রূপে খগ বাহু দ্বিখণ্ড করিলে খগছ অর্থাৎ কগঘ কোণ কখগ কোণ হইতে বৃহৎ ইহা উপপন্ন হইবে। অতএব ত্রিভুজের কোন বাহু, ইত্যাদি।

সং উ.। খঙ = ঙচ। কঙ = ঙগ। ∠কঙখ = ∠চঙগ ∴ ∠ঙগচ = ∠খকঙ (৪ প্র.)। ∠ঙগঘ (অর্থাৎ কগঘ) > ঙগচ (৯ স্ব. সা.) ∴ ∠কগঘ > খকঙ কিম্বা খকগ।

PROP. XVII. THEOR.

Any two angles of a triangle taken together are less than two right angles.

Let ABC be any triangle; any two of its angles taken together are less than two right angles.

Produce BC to D; and because ACD is the exterior angle of the triangle ABC, ACD is greater (16 1.) than the interior opposite angle ABC; to each of these add the angle ACB; therefore the angles ACD, ACB are greater than the angles ABC, ACB but ACD, ACB are together equal (13. 1.) to two right angles; therefore, the angles ABC, BCA are less than two right angles. In like manner, it may be demonstrated, that BAC, ACB, as also, CAB, ABC, are less than two right angles. Therefore, *any two angles, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $\angle ACD \urcorner \angle ABC$ (16. of 1.) $\therefore \angle ACD + \angle ACB \urcorner \angle ABC + \angle ACB$; $\angle ACD + \angle ACB = 2$ Rt. $\angle$s $\therefore \angle ABC + \angle ACB \angle 2$ Rt. $\angle$s.

PROP. XVIII. THEOR.

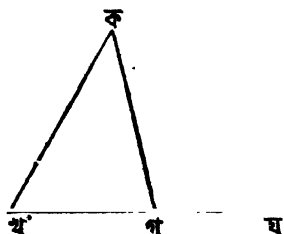
The greater side of every triangle has the greater angle opposite to it.

Let ABC be a triangle of which the side AC is greater than the side AB; the angle ABC is also greater than the angle BCA.

From AC, which is greater than AB, cut off (3. 1.) AD equal to AB, and join BD; and because ADB is the exterior angle of the triangle BDC, it is greater (16. 1.)

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

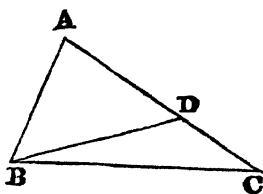
ত্রিভুজের যে দুই কোণ লও একত্র করিলে দুই সমকোণ হইতে ন্যূন হইবে।

কখগ এক ত্রিভুজ ইহার যে দুই কোণ লও একত্র করিলে দুই সমকোণের ন্যূন হইবে। খগ রেখা ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর, কগঘ কোণ কখগ ত্রিভুজের বহিঃস্থ হইয়া (১৬ প্র.) অন্তরের সম্মুখস্থ কোণ কখগ হইতে অধিক এ উভয়ে কগখ যোগ করিলে কগঘ এবং কগখ একত্র কখগ এবং কগখ কোণ দ্বয় হইতে অধিক হইবে কিন্তু (১৩ প্র.) কগঘ ও কগখ একত্র দুই সমকোণের তুল্য অতএব কখগ এবং কগখ একত্র দুই সমকোণ হইতে ন্যূন। খকগ কগখ এবং গকখ কখ গখ যে ঐরূপ তাহা উপপন্ন করা যায়। অতএব ত্রিভুজের, ইত্যাদি।

সং উ.। ∠ কগঘ > ∠কখগ (১৬ প্র.) ∴ ∠ কগঘ + ∠ কগখ > ∠ কখগ + ∠ কগখ। ∠ কখঘ + ∠ কগখ = ২ সমকোণ ∴ ∠ কখগ + ∠ কগখ < ২ সমকোণ।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রত্যেক ত্রিভুজে বৃহত্তর বাহুর সম্মুখস্থ কোণও বৃহত্তর হইবে।

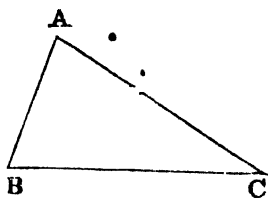
কখগ এক ত্রিভুজ তাহার মধ্যে কগ বাহু কখ বাহু হইতে বৃহত্তর। কখগ কোণও খগক কোণ হইতে বৃহত্তর। কখ হইতে কগ বৃহত্তর অতএব কগ হইতে কখ সমান এক খণ্ড পৃথক কর যথা কঘ এবং ঘখ রেখা টান। খঘগ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ কঘখ, সুতরাং (১৬ প্র.) অন্তর্ব্বর্ত্তি সম্মুখস্থ কোণ ঘগখ হইতে বৃহত্তর কিন্তু (৫ প্র.) কঘখ, কখঘ পরস্পর সমান কেননা কঘ এবং কখ পরস্পর সমান তন্নিমিত্তে কখঘ কোণও কগঘ হইতে বৃহত্তর অতএব কখগ, কখঘ হইতে

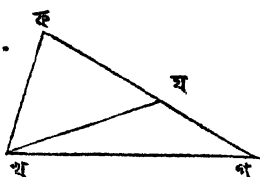
than the interior opposite angle DCB; but ADB is equal (5. 1.) to ABD, because the side AB is equal to the side AD; therefore the angle ABD is likewise greater than the angle ACB; wherefore, much more is the angle ABC greater than ACB. Therefore, *the greater side, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. ∵ AB = AD (by constr.) $\angle$ADB = $\angle$ABD (5 of 1.) $\angle$ADB ⁊ $\angle$ACB (16. of 1.) ∴ $\angle$ABD ⁊ $\angle$ACB; $\angle$ABC ⁊ $\angle$ABD (9. Ax.) ∴ $\angle$ ABC ⁊ $\angle$ ACB.

PROP. XIX. THEOR.

The greater angle of every triangle is subtended by the greater side, or has the greater side opposite to it.

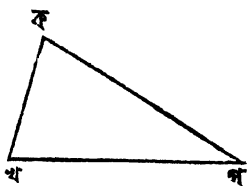
Let ABC be a triangle, of which the angle ABC is greater than the angle BCA; the side AC is likewise greater than the side AB.

For, if it be not greater, AC must either be equal to AB, or less than it; it is not equal, because then the angle ABC would be equal (5. 1.) to the angle ACB; but it is not; therefore AC is not equal to AB; neither is it less, because then the angle ABC would be less (18. 1.) than the angle ACB, but it is not; therefore the side AC is not less than AB; and it has been shown that it is not equal to AB; therefore, AC is greater than AB. Wherefore, *the greater angle, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. If AC ⁊̸ AB, it is either = or $\angle$ AB; Suppose AC = AB ∴ $\angle$ABC = $\angle$ACB (5 of 1.) but by hypothesis it is not so, ∴ AC ≠ AB Again, suppose AC $\angle$ AB ∴ $\angle$ABC $\angle$ $\angle$ACB (18. 1.) but by hypothesis it is not so ∴ AC $\not\angle$ AB ∴ AC ⁊ AB.

বৃহৎ হইয়া কগখ হইতে আরো বৃহত্তর। অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজে, ইত্যাদি।

সং উ.। ∵ কখ = কঘ, ∴ ∠কঘখ = ∠কখঘ (৫ প্র.) ∠কঘখ > ∠কগখ (১৬ প্র.) ∴ ∠কখঘ > ∠কগখ। ∠কখগ > ∠কখঘ ∴ ∠কখগ > ∠কগখ।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রত্যেক ত্রিভুজে বৃহত্তর কোণের সম্মুখস্থ বাহুও বৃহত্তর হইবে।

কখগ এক ত্রিভুজ তাহার মধ্যে কখগ কোণ খগক কোণ হইতে বৃহত্তর। কগ বাহুও কখ বাহু হইতে বৃহত্তর হইবে।

উপপত্তি। কগ যদি কখ হইতে বৃহত্তর না হয় তবে সমান, নচেৎ ক্ষুদ্রতর হইবে, কিন্তু সমান হইতে পারে না কেননা তাহা হইলে কখগ এবং খগক দুই কোণও (৫ প্র.) সমান হইত, এবং ক্ষুদ্রতরও নহে কেননা তাহা হইলে (১৮ প্র.) কখগ কোণ খগক হইতে ক্ষুদ্রতর হইত। সুতরাং যদি কগ বাহু কখ বাহুর সমান নহে এবং ক্ষুদ্রতরও নহে তবে ব্যতিরেক অন্বয়ে অবশ্য বৃহত্তর হইবে। অতএব কগ কখ হইতে বৃহত্তর। তন্নিমিত্তে প্রত্যেক ত্রিভুজে, ইত্যাদি।

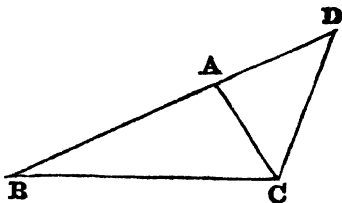
সং উ.। যদি কগ ≯ কখ তবে তাহা = অথবা ∠ কখ। প্রথমতঃ যেন কগ = কখ ∴ ∠কখগ = ∠কগখ (৫ প্র.) ইহাতে কল্পনার ব্যতিক্রম। ∴ কগ ≠ কখ। পুনশ্চ যেন কগ ∠ কখ ∴ ∠কখগ ∠ ∠কগখ (১৮ প্র.) ইহাতেও কল্পনার ব্যতিক্রম। ∴ কগ ∠̸ কখ ∴ কগ > কখ।

PROP. XX. THEOR.

Any two sides of a triangle taken together are greater than the third side.

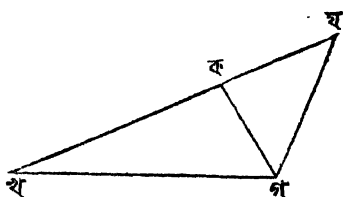
Let ABC be a triangle; any two sides of it taken together are greater than the third side, viz. the sides BA, AC greater than the side BC; and AB, BC greater than AC; and BC, CA greater than AB.

Produce BA to the point D, and make (3. 1.) AD equal to AC and join DC.

Because DA is equal to AC, the angle ADC is likewise equal (5. 1.) to ACD; but the angle BCD is greater than the angle ACD; therefore the angle BCD is greater than the angle ADC and because the angle BCD of the triangle DCB is greater than its angle BDC, and because the greater (19. 1.) side is opposite to the greater angle; therefore the side DB is greater than the side BC; but DB is equal to BA and AC together; therefore BA and AC taken together are greater than BC. In the same manner, it may be demonstrated, that the sides AB, BC are greater than CA, and BC, CA greater than AB. Therefore, *any two sides &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $AD = AC$ (by constr.) $\therefore \angle ADC = \angle ACD$ (5 of 1.) $\angle BCD > \angle ACD$ (9. Ax.) $\therefore \angle BCD > \angle ADC \therefore BD > BC$ (19. of 1.) $BD = BA + AD = BA + AC \therefore BA + AC > BC$.

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের যে দুই বাহু একত্র কর' তাহাদের যোগ তৃতীয় বাহু হইতে বৃহত্তর হইবে।

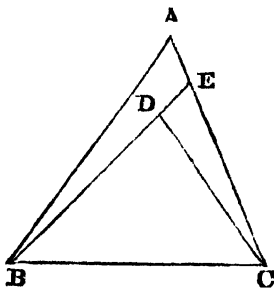
কখগ এক ত্রিভুজ ইহার যে দুই বাহু লও একত্র করিলে অবশিষ্ট বাহু হই-তে বৃহত্তর হইবে অর্থাৎ খক কগ একত্র খগ হইতে বৃহত্তর, কখ খগ একত্র কগ হইতে বৃহত্তর এবং খগ গক একত্র কখ হইতে বৃহত্তর।

খক রেখা ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া কঘ কগ সমান কর পরে ঘগ রেখা টান। ঘক কগ পরস্পর সমান এই হেতুক (৫ প্র.) কঘগ এবং কগঘ কোণ দ্বয়ও পরস্পর সমান সুতরাং খগঘ কোণ কগঘ হইতে বৃহত্তর হওয়াতে কঘগ হইতেও বৃহত্তর অতএব খগঘ ত্রিভুজে খগঘ কোণ খঘগ কোণ হইতে বৃহত্তর হওয়াতে খঘ বাহুও খগ হইতে বৃহত্তর কেননা (১৯ প্র.) বৃহত্তর কোণের সম্মুখস্থ বাহুও বৃহত্তর হয়, কিন্তু খঘ রেখা খক ও কগ এ দুএর যোগ তুল্য অতএব খক এবং কগ উভয়ে একত্র খগ হইতে বৃহৎ। এবং কখ খগ একত্র যোগে কগ হইতে, ও খগ গক একত্র যোগে কখ হইতে বৃহৎ তাহাও এই রূপে উপপন্ন হইতে পারে। অতএব ত্রিভুজের যে দুই বাহু, ইত্যাদি।

সং উ.। কঘ = কগ (অঙ্ক পাত) ∴ ∠কঘগ = ∠কগঘ (৫ প্র.) ∠খগঘ ⁊ ∠কগঘ (৯ স্ব. সা.) ∴ ∠খগঘ ⁊ ∠কঘগ ∴ খঘ ⁊ খগ (১৯ প্র.) খঘ = খক + কঘ = খক + কগ ∴ খক + কগ ⁊ খগ।

PROP. XXI. THEOR.

If from the ends of one side of a triangle, there be drawn two straight lines to a point within the triangle, these two lines shall be less than the other two sides of the triangle, but shall contain a greater angle.

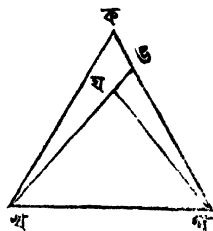
Let the two straight lines BD, CD be drawn from B, C, the ends of the side BC of the triangle ABC, to the point D within it; BD and DC are less than the other two sides BA, AC of the triangle, but contain an angle, BDC greater than the angle BAC.

Produce BD to E; and because two sides of a triangle (20. 1.) are greater than the third side, the two sides BA, AE of the triangle ABE are greater than BE. To each of these add EC; therefore, the sides BA, AC are greater than BE, EC: Again, because the two sides CE, ED, of the triangle CED are greater than CD, if DB be added to each, the sides CE, EB, will be greater than CD, DB; but it has been shown, that BA, AC are greater than BE, EC; much more then are BA, AC greater than BD, DC.

Again, because the exterior angle of a triangle (16. 1.) is greater than the interior opposite angle, the exterior angle BDC of the triangle CDE is greater than CED; for the same reason, the exterior angle CEB of the triangle ABE is greater than BAC; and it has been demonstrated that the angle BDC is greater than the angle CEB; much more then is the angle BDC greater than the angle BAC. Therefore, *if from the ends of &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $BA + AE > BE$ (20 of 1.) $\therefore BA + AE + EC = BA + AC > BE + EC$. $EC + DE$

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন বাহুর দুই প্রান্ত হইতে দুই সরল রেখা অঙ্কিত হইয়া যদি ত্রিভুজের মধ্যে কোন বিন্দুতে মিলিত হয় তবে এই দুই রেখা পরস্পর যোগে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর যোগ হইতে ন্যূন হইবে কিন্তু তাহাদের কোণ বৃহত্তর হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর খ এবং গ দুই অগ্র হইতে খঘ এবং গঘ দুই রেখা অঙ্কিত হইয়া ত্রিভুজের মধ্যে ঘ চিহ্নে একত্র মিলিতেছে অতএব খঘ ঘগ একত্র খক কগ দুই বাহুর যোগ হইতে ন্যূন হইবে কিন্তু খঘগ কোণ খকগ কোণ হইতে অতিরিক্ত হইবে।

খঘ, ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর তবে কখঙ ত্রিভুজের খক কঙ এই দুই বাহু একত্র খঙ হইতে অধিক হইবে কেননা (২০ প্র.) ত্রিভুজের দুই বাহু একত্র করিলে তৃতীয় বাহু হইতে অধিক হয়, পরে এই দুই সমান বস্তুর প্রত্যেকেতে ঙগ যোগ কর তবে খক কগ একত্র খঙ ঙগ হইতে বৃহত্তর। অপিচ গঙঘ ত্রিভুজের গঙ ঙঘ এই দুই বাহু গঘ হইতে অতিরিক্ত সুতরাং উভয়তঃ ঘখ যোগ করিলে গঙ ঙখ, গঘ ঘখ হইতে অধিক হইবে, পূর্ব্বে উক্ত হইয়াছে খক কগ একত্র খঙ ঙগ হইতে বৃহত্তর সুতরাং তাহারা খঘ ঘগ হইতে আরও বৃহত্তর।

অপর। (১৬ প্র.) ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণ হইতে অধিক অতএব গঘঙ ত্রিভুজের বহিঃস্থ খঘগ কোণ গঙঘ হইতে অধিক, এবং ঐ কারণে কখঙ ত্রিভুজের বহিঃস্থ গঙখ কোণ খকগ হইতে অধিক, সুতরাং খঘগ, খকগ হইতে আরো বৃহত্তর। অতএব ত্রিভুজের কোন বাহুর, ইত্যাদি।

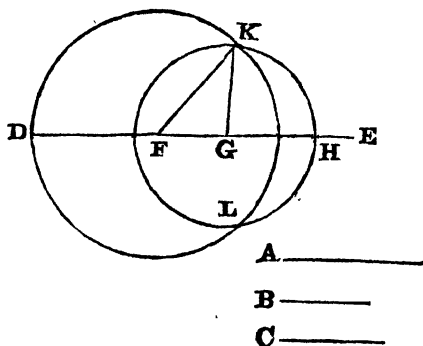
সং উ.। খক + কঙ > খঙ (২০ প্র.) ∴ খক + কঙ + ঙগ অর্থাৎ খক + কগ > খঙ + ঙগ ; ঙগ + ঘঙ > ঘগ

$> DC$ (20 of 1.) $\therefore EC + DE + DB = EC + BE > BD + DC$, $\therefore$ much more $BA + AC > BD + DC$. $\angle BDC > \angle DEC$ or $\angle BEC$ (16 of 1.) $\angle BEC > \angle BAE$ or $\angle BAC$ (16 of 1.) $\therefore$ much more $\angle BDC > \angle BAC$.

PROP. XXII. PROB.

To construct a triangle of which the sides shall be equal to three given straight lines; but any two whatever of these lines must be greater than the third (20. 1.).

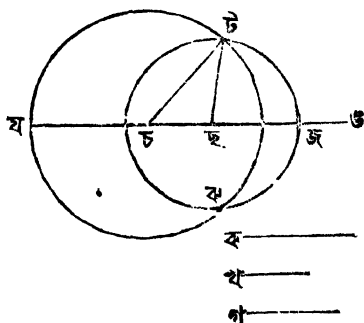
Let A, B, C be the three given straight lines, of which any two whatever are greater than the third, viz. A and B greater than C; A and C greater than B; and B and C than A. It is required to make a triangle of which the sides shall be equal to A, B, C, each to each.

Take a straight line DE, terminated at the point D but unlimited towards E and make (3. 1.) DF equal to A, FG to B, and GH equal to C; and from the centre F, at the distance FD, describe (3. Post.) the circle DKL; and from the centre G, at the distance GH, describe (3. Post.) another circle HLK; and join KF, KG; the triangle KFG has its sides equal to the three straight lines A, B, C.

Because the point F is the centre of the circle DKL, FD is equal (11. Def.) to FK; but FD is equal to the straight line A; therefore FK is equal to A: Again, because G is the centre of the circle LKH,

(২০ প্র.) ∴ ঙগ + ঘঙ + ঘখ অর্থাৎ ঙগ + খঙ 7 খঘ + ঘগ ∴ খক + কগ 7 খঘ + ঘগ। ∠খঘগ 7 ∠ঘঙগ কিম্বা খঙগ (১৬ প্র.) ∠খঙগ 7 ∠খকঙ কিম্বা খকগ (১৬ প্র.) ∴ ∠খঘগ 7 ∠খকগ।

২২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এমত এক ত্রিভুজ নির্ম্মাণ করিতে হইবে যে তাহার তিন বাহু তিন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সদৃশ, এবং এই রেখা ত্রয়ের যে দুই রেখা লও পরস্পর যোগে তৃতীয় হইতে বৃহত্তর হইবে।

ক, খ, গ, তিন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা ইহাদের মধ্যে যে দুই রেখা লও একত্র করিলে তৃতীয় হইতে অধিক হইবে অর্থাৎ ক ও খ, গ হইতে বৃহত্তর; ক ও গ, খ হইতে বৃহত্তর; এবং খ ও গ, ক হইতে বৃহত্তর। এমত এক ত্রিভুজ করিতে হইবে যাহার তিন বাহু ক্রমশ, ক, খ, গ, সমান।

ঘঙ এক সরল রেখার ন্যাস কর ঘ বিন্দুতে তাহার সীমা, কিন্তু ঙ বিন্দুদিকে সীমা নাই, পরে ঘচ, ক সমান, চছ, খ সমান, এবং ছজ, গ সমান ছেদ কর, এবং চ কেন্দ্র করিয়া চঘ দূরে এক বৃত্ত আঁক যথা ঘঝট এবং ছ কেন্দ্র করিয়া ছজ দূরে এক বৃত্ত আঁক যথা জঝট। চ,ট, এবং ছ,ট সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত কর। টচছ ত্রিভুজের তিন বাহু ক্রমশ ক, খ, গ, সমান হইবে।

উ.। টঘঝ বৃত্তের কেন্দ্র চ অতএব চট চঘ সহিত সমান, কিন্তু চঘ, ক সহিত সমান সুতরাং চটও ক সহিত সমান। এবং জঝট বৃত্তের কেন্দ্র ছ অতএব ছট, ছজ সহিত সমান কিন্তু ছজ, গ সহিত সমান সুতরাং ছটও গ সহিত সমান। এবং চছ, খ

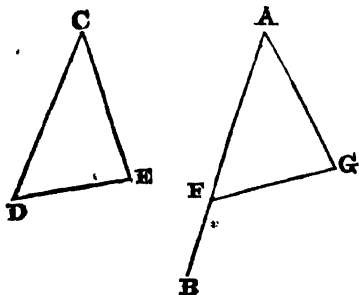
GH is equal (11. Def.) to GK; but GH is equal to C; therefore also GK is equal to C; and FG is equal to B; therefore the three straight lines KF, FG, GK, are equal to the three A, B, C: And thefore the triangle KFG has its three sides, KF, FG, GK equal to the three given straight lines, A, B, C. Which was to be done.

Sym. dem. FK = FD (11. Def.) FD = A (by constr.) ∴ FK = A (1. Ax.) GK = GH (11. Def.) GH = C (by constr.) ∴ GK = C, FG = B (by constr.) ∴ FK + FG + GK = A + B + C each to each.

PROP. XXIII. PROB.

At a given point in a given straight line, to make a rectilineal angle equal to a given rectilineal angle.

Let AB be the given straight line, and A the given point in it, and DCE the given rectilineal angle; it is required to make an angle at the given point A, in the given straight line AB, that shall be equal to the given rectilineal angle DCE.

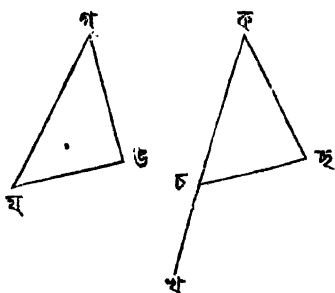
In CD, CE, take any points D, E, and join DE; and make (22. 1.) the triangle AFG, the sides of which shall be equal to the three straight lines, CD, DE, CE, so that CD be equal to AF, CE to AG, and DE to FG; and because DC, CE are equal to FA, AG, each to each, and the base DE to the base FG; the angle DCE is equal (8. 1.) to the angle FAG. Therefore, at the given point A in the given straight line AB, the angle FAG is made equal to the given rectilineal angle DCE. Which was to be done.

Sym. dem. AF = CD (by constr.) AG = CE (by constr.) FG = DE (by constr.) ∴ ∠FAG = ∠DCE (8 of 1.)

সহিত সমান, অতএব ঘচ, চছ, এবং ছজ এই তিন রেখা ক, খ, গ, সহিত ক্রমশ সমান, সুতরাং টচছ ত্রিভুজের তিন বাহু ক খ গ সহিত ক্রমশ সমান।

সং উ.। চট = চঘ (১১ সংজ্ঞা) চঘ = ক (অঙ্কপাত) ∴ চট = ক (১ স্ব.সা)। ছট = ছজ (১১ সংজ্ঞা) চজ = গ (অঙ্কপাত) ∴ ছট = গ। চছ = খ। ∴ ক্রমশ চট + চছ + ছট = ক + খ + গ।

২৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ তুল্য সরল রৈখিক কোণ করিতে হইবে।

কখ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা তাহার মধ্যে ক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং ঘগঙ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ। খক রেখার ক বিন্দুতে এমত এক সরল রৈখিক কোণ করিতে হইবে যাহা ঘগঙ সহিত সমান হয়।

গঘ এবং গঙ মধ্যে দুই বিন্দুর নির্দ্দেশ কর যথা ঘ এবং ঙ এবং ঘঙ রেখা টান, পরে (২২ প্র.) কচছ ত্রিভুজ এমত করিয়া আঁক যেন কচ, গঘ সমান, কছ, গঙ সমান এবং চছ, ঘঙ সমান হয়। অতএব গঘ গঙ ক্রমশ কচ কছ সমান হওয়াতে আর ঘঙ ভূমিও চছ ভূমি তুল্য হওয়াতে ঘগঙ কোণ (৮ প্র.) চকছ কোণের সহিত সমান। সুতরাং কখ রেখার ক বিন্দুতে এক কোণ হইয়াছে যাহা ঘগঙ সহিত সমান। ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

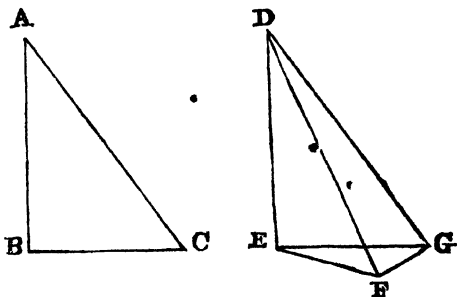
সং উ.। কচ = গঘ। কছ = গঙ। চছ = ঘঙ (অঙ্কপাত) ∴ ∠ চকছ = ∠ ঘগঙ (৮ প্র.)

PROP. XXIV. THEOR.

If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, but the angle contained by the two sides of the one greater than the angle contained by the two sides of the other; the base of that which has the greater angle is greater than the base of the other.

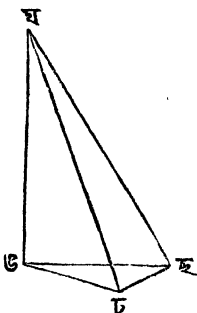
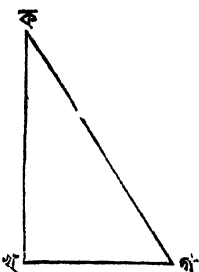
Let ABC, DEF be two triangles which have the two sides AB, AC equal to the two DE, DF, each to each, viz. AB equal to DE, and AC to DF; but the angle BAC greater than the angle EDF; the base BC is also greater than the base EF.

Of the two sides DE, DF, let DE be the side which is not greater than the other, and at the point D, in the straight line DE, make (23. 1.) the angle EDG equal to the angle BAC; and make DG equal (3. 1.) to AC or DE, and join EG, GF.

Because AB is equal to DE, and AC to DG, the two sides BA, AC are equal to the two ED, DG, each to each, and the angle BAC is equal to the angle EDG, therefore the base BC is equal (4. 1.) to the base EG; and because DG is equal to DF, the angle DFG

is equal (5. 1.) to the angle DGF; but the angle DGF is greater than the angle EGF; therefore the angle DFG is greater than EGF; much more is the angle EFG greater than the angle EGF; and because the angle EFG of the triangle EFG is greater than its angle EGF, and because the greater (19. 1.) side is

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটীর দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত প্রত্যেকে সমান হয় কিন্তু একটীর ঐ বাহু দ্বয়ের মধ্য-বর্ত্তি কোণ যদি অন্যটীর বাহু দ্বয়ের মধ্যবর্ত্তি কোণ হইতে বৃহত্তর হয় তবে যে ত্রিভুজে ঐ বৃহত্তর কোণ আছে তাহার ভূমিও অন্যের ভূমি হইতে বৃহত্তর হইবে।

কখগ এবং ঘঙচ দুই ত্রিভুজ তাহাদের মধ্যে কখ কগ বাহু দ্বয় ঘঙ ঘচ বাহু দ্বয়ের সহিত ক্রমশ সমান কিন্তু খকগ কোণ ঙঘচ কোণ হইতে বৃহত্তর। খগ ভূমিও ঙচ ভূমি হইতে বৃহত্তর।

ঘঙ, ঘচ দুই বাহুর মধ্যে ঘঙ যেন বৃহত্তর নহে এমত কল্পনা কর পরে ঘঙ রেখার ঘ বিন্দুতে ঙঘছ কোণ খকগ সমান করিয়া (২৩ প্র) অঙ্কিত কর এবং ঘছ রেখাকে কগ অথবা ঘচ সমান কর ও ঙছ, চছ এই২ রেখা টান।

কখ, ঘঙ সমান ও কগ, ঘছ সমান সুতরাং খক, ও কগ, ঙঘ ও ঘছ সহিত ক্রমশ সমান এবং খকগ কোণও ঙঘছ কোণের তুল্য, অতএব (৪ প্র.) খগ ভূমিও ঙছ সহিত সমান। অপর ঘচ, ঘছ, পরস্পর সমান হওয়াতে (৫ প্র.) ঘছচ কোণও ঘচছ কোণের সমান কিন্তু ঘছচ কোণ (৯ স্ব. সা.) ঙছচ হইতে বৃহত্তর সুতরাং ঘচছও ঙছচ হইতে বৃহত্তর তবে ঙচছ, ঙছচ হইতে আরো বৃহত্তর অতএব ঙচছ ত্রিভুজে ঙচছ কোণ ঙছচ হইতে বৃহত্তর থাকাতে এবং (১৯ প্র.) বৃহত্তর কোণের সম্মুখস্থ বাহুও বৃহত্তর হওয়াতে ঙছ, ঙচ হইতে বৃহত্তর সিদ্ধ হইল, এবং ঙছ,

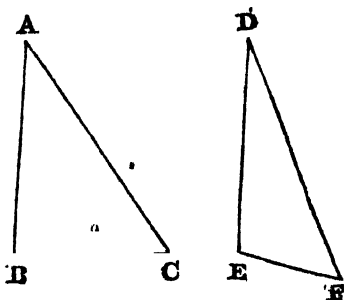
opposite to the greater angle, the side EG is greater than the side EF; but EG is equal to BC; therefore also BC is greater than EF. Therefore, *if two triangles, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $AB = DE$ (by Hyp.) $AC = DG$ (by constr.) $\angle BAC = \angle EDG$ $\therefore$ (4 of 1.) $BC = EG$; $DG = DF$ $\therefore$ $\angle DGF = \angle DFG$; $\angle DGF > \angle EGF$ $\therefore$ $\angle DFG > \angle EGF$ $\therefore$ much more $\angle EFG > \angle EGF$ $\therefore$ (19 of 1.) $EG > EF$ $\therefore$ $BC > EF$.

PROP. XXV. THEOR.

If two triangles have two sides of the one equal to two sides of the other, each to each, but the base of the one greater than the base of the other; the angle contained by the sides of that which has the greater base, is greater than the angle contained by the sides of the other.

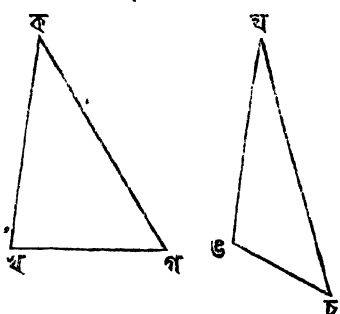
Let ABC, DEF be two triangles which have the two sides AB, AC equal to the two sides DE, DF, each to each, viz. AB equal to DE, and AC to DF; but let the base CB be greater than the base EF; the angle BAC is likewise greater than the angle EDF.

For, if it be not greater, it must either be equal to it, or less; but the angle BAC is not equal to the angle EDF, because then the base BC would be equal (4. 1.) to EF; but it is not; therefore the angle BAC is not equal to the angle EDF; neither is it less; because then the base BC would be less (24. 1.) than the base EF; but it is not; therefore the angle BAC is not less than the

খগ সহিত সমান হওয়াতে খগও ঙচ হইতে বৃহত্তর হইবে। অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে, ইত্যাদি।

সং উ.। কখ = ঘঙ (কল্পনা) কগ = ঘছ (অঙ্কপাত) ∠ খকগ = ∠ঙঘছ ∴ (৪ প্র.) খগ = ঙছ। ঘছ = ঘচ ∴ ∠ ঘছচ = ∠ঘচছ। ∠ঘছচ 7 ∠ঙছচ ∴ ∠ঘচছ 7 ∠ঙছচ ∴ ∠ঙচছ 7 ∠ঙছচ ∴ (১৯ প্র.) ঙছ 7 ঙচ ∴ খগ 7 ঙচ।

২৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত প্রত্যেকে সমান হইলে যদি ভূমি বৃহত্তর হয় তবে যে ত্রিভুজের ভূমি বৃহত্তর তাহার বাহু দ্বয়ের মধ্যবর্ত্তি কোণও অন্যের বাহু দ্বয়ের মধ্যস্থ কোণ হইতে বৃহত্তর হইবে।

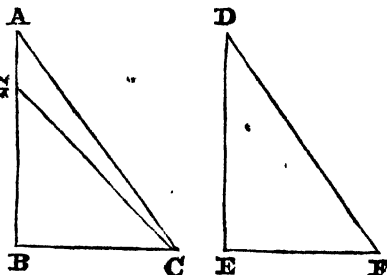
কখগ ও ঘঙচ দুই ত্রিভুজ তাহার মধ্যে কখ ও কগ, ঘঙ ও ঘচ সহিত ক্রমশ সমান অর্থাৎ কখ, ঘঙ সহিত ও কগ, ঘচ সহিত সমান; কিন্তু খগ ভূমি ঙচ ভূমি হইতে বৃহত্তর। খকগ কোণও ঙঘচ হইতে বৃহত্তর হইবে।

উ.। কেননা যদি বৃহত্তর না হয় তবে সমান কিম্বা লঘুতর হইবে। কিন্তু খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইতে পারে না। কেননা তাহা হইলে (৪ প্র.) খগ ভূমি ঙচ ভূমি সমান হইত, ফলত এস্থলে ভূমি সমান নহে সুতরাং উক্ত কোণদ্বয়ও সমান হইতে পারে না। এবং খকগ, ঙঘচ হইতে লঘুতর নহে কেননা তাহা হইলে (২৪ প্র.) খগ ভূমি ঙচ হইতে লঘুতর হইত, তাহা এস্থলে নহে, অতএব কখগ কোণ ঙঘচ হইতে লঘুতর নহে এবং সমানও নহে সুতরাং বৃহত্তর। অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে, ইত্যাদি।

angle EDF; and it was shown that is not equal to it: therefore the angle BAC is greater than the angle EDF. Wherefore, *if two triangles, &c.* Q. E. D.

Sym. dem If $\angle BAC \not> \angle EDF$, it is either $=$ or $\angle$ $\angle EDF$. Suppose $\angle BAC = \angle EDF$ $\therefore$ (4 of 1.) $BC = EF$ but by Hyp. it is not so $\therefore$ $\angle BAC \neq \angle EDF$. Again suppose $\angle BAC$ $\angle$ $\angle EDF$ $\therefore$ by (24 of 1) BC $\angle EF$ but by Hyp. it is not so $\therefore$ $\angle BAC \not\angle \angle EDF$ $\therefore$ $\angle BAC > \angle EDF$.

PROP. XXVI. THEOR.

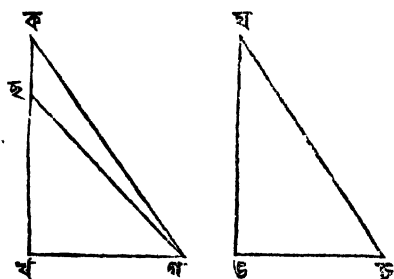
If two triangles have two angles of the one equal to two angles of the other, each to each; and one side equal to one side, viz. either the sides adjacent to the equal angles, or the sides opposite to the equal angles in each; then are the other sides equal, each to each; and also the third angle of the one is equal to the third angle of the other.

Let ABC, DEF be two triangles, which have the angles ABC, BCA equal to the angles DEF, EFD, viz. ABC to DEF, and BCA to EFD; and which have also one side equal to one side; and first, let those sides be equal which are adjacent to the angles that are equal, in the two triangles, viz. BC to EF; the other sides shall be equal, each to each, viz. AB to DE, and AC to DE; and the third angle BAC to the third angle EDF.

For, if AB be not equal to DE, one of them must be the greater. Let AB be the greater of the two, and make BG equal to DE, and join GC; therefore, because BG is equal to DE, and BC to EF, the two

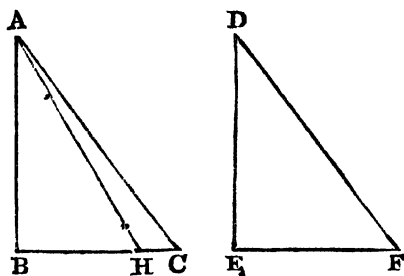
সং উ.। যদি ∠খকগ ≯ ∠ঙঘচ তবে তাহা = অথবা ∠ ∠ঙঘচ। প্রথমতঃ যেন ∠খকগ = ∠ঙঘচ ∴ (৪ প্র.) খগ = ঙচ ইহাতে কল্পনার ব্যতিক্রম। ∴ ∠খকগ ≠ ∠ঙঘচ। পুনশ্চ যেন ∠খকগ ∠ ∠ঙঘচ ∴ (২৪ প্র.) খগ ∠ ঙচ। ইহাতেও কল্পনার ব্যতিক্রম। ∴ ∠খকগ ∡ ∠ঙঘচ ∴ ∠খকগ 7 ∠ঙঘচ।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

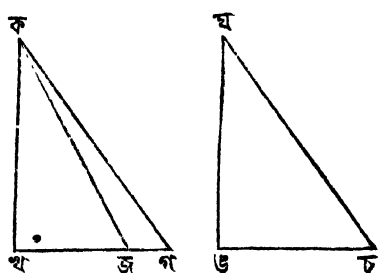
দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটীর দুই কোণ প্রত্যেকে অন্যের দুই কোণের সমান হয় এবং এক২ বাহুও সমান হয় অর্থাৎ সমান কোণ দ্বয়ের সংলগ্ন অথবা সম্মুখস্থ বাহু দ্বয়ও যদি ঐ দুই ত্রিভুজে সমান হয় তবে অবশিষ্ট দুই বাহুও প্রত্যেকে সমান হইবে এবং একটীর তৃতীয় কোণও অন্যের তৃতীয় কোণের তুল্য হইবে।

কখগ এবং ঘঙচ দুই ত্রিভুজ তাহার মধ্যে কখগ ও কগখ এই কোণ দ্বয় ঘঙচ ও ঘচঙ সহিত ক্রমশ সমান অর্থাৎ কখগ, ঘঙচ সহিত ও কগখ, ঘচঙ সহিত সমান এবং তাহাদের এক২ বাহুও পরস্পর সমান। প্রথমতঃ, সমান কোণ দ্বয়ের সমীপস্থ বাহু দ্বয় অর্থাৎ খগ ঙচ পরস্পর সমান কল্পনা কর তবে অবশিষ্ট বাহুও প্রত্যেকে পরস্পর সমান হইবে অর্থাৎ কখ, ঘঙ সহিত ও কগ, ঘচ সহিত সমান হইবে এবং অবশিষ্ট কোণ খকগ ও ঙঘচ ইহারাও পরস্পর সমান হইবে।

উ.। কখ যদি ঘঙ সমান না হয় তবে ইহাদের মধ্যে একটী অবশ্য বৃহত্তর হইবে। কখ বৃহত্তর হউক, অতএব কখ হইতে ঘঙ সমান এক খণ্ড অর্থাৎ খছ ছেদ কর। খছ ঘঙ সমান, ও

sides GB, BC are equal to the two DE, EF, each to each; and the angle GBC is equal to the angle DEF; therefore the base GC is equal (4. 1.) to the base DF, and the triangle GBC to the triangle DEF, and the other angles to the other angles, each to each, to which the equal sides are opposite; therefore the angle GCB is equal to the angle DFE; but DFE is by the hypothesis, equal to the angle BCA; wherefore also the angle BCG is equal to the angle BCA, the less to the greater, which is impossible; therefore AB is not unequal to DE, that is, it is equal to it; and BC is equal to EF; therefore the two AB, BC are equal to the two DE, EF, each to each; and the angle ABC is equal to the angle DEF; therefore the base AC is equal to (4. 1.) the base DF, and the angle BAC to the angle EDF.

Next, let the sides which are opposite to equal angles in each triangle be equal to one another. viz. AB to DE; likewise in this case, the other sides shall be equal, AC to DF, and BC to EF; and also the third angle BAC to the third EDF.

For, if BC be not equal to EF, let BC be the greater, and make BH equal to EF, and join AH; and because BH is equal to EF, and AB to DE; the two AB, BH are equal to the two DE, EF, each to each, and they contain equal angles; therefore (4. 1.) the base AH is equal to the base DF, and the triangle ABH to the triangle DEF, and the other angles are equal, each to each, to which the equal sides are opposite; therefore the angle BHA is equal to the angle EFD; but EFD is equal to the angle BCA; therefore also the angle BHA is equal to the angle BCA, that is, the exterior

খগ, ঙচ সমান হওয়াতে খছ ও খগ ক্রমশ ঘঙ ও ঙচ সহিত সমান, এবং ছখগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান অতএব (৪ প্র.) ছগ ভূমি ঘচ সহিত সমান এবং ছখগ ত্রিভুজ ঘঙচ সহিত সমান ও সমান বাহুর সম্মুখস্থ অন্যান্য কোণও ক্রমশ পরস্পর সমান সুতরাং ছগখ কোণ ঘচঙ সহিত সমান, এবং কগখ, ঘচঙ সহিত সমান হওয়াতে ছগখ (১ স্ব. সা.) কগখ সহিত সমান, ইহা অসাধ্য, কেননা (৯ স্ব. সা.) ছগখ, কগখ হইতে লঘুতর অতএব কখ, ঘঙ রেখার অসমান নহে অর্থাৎ সমান, কখ, ঘঙ সমান হওয়াতে এবং খগ, ঙচ সমান থাকাতে কখ, খগ ক্রমশ ঘঙ, ঙচ সহিত সমান এবং কখগ কোণও ঘঙচ সহিত সমান অতএব (৪ প্র.) কগ, ঘচ সহিত সমান ও খকগ কোণ ঙঘচ সহিত সমান।

দ্বিতীয়তঃ, ঐ দুই ত্রিভুজে সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহু অর্থাৎ কখ ও ঘঙ সমান হউক এস্থলেও অবশিষ্ট বাহু ও কোণ সমান হইবে অর্থাৎ খগ, ঙচ সহিত ও কগ, ঘচ সহিত এবং খকগ কোণ ঙঘচ সহিত সমান হইবে।

উ। যদি খগ, ঙচ সহিত সমান না হয় তবে একটী অপেক্ষা অন্যটী বৃহত্তর হইবে, খগ বৃহত্তর হউক, তাহা হইতে খজ এক অংশ ঙচ সমান করিয়া ছেদ কর এবং ক, জ সরল রেখাতে সংযুক্ত কর। খজ, ঙচ সহিত ও কখ, ঘঙ সহিত সমান হওয়াতে কখ, খজ ক্রমশ ঘঙ, ঙচ সহিত সমান এবং তাহাদের মধ্যবর্ত্তি কোণও সমান, অতএব (৪ প্র.) কজ ভূমি ঘচ ভূমির সহিত সমান এবং কখজ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান এবং সমান বাহুর সম্মুখস্থ অবশিষ্ট কোণও সমান তন্নিমিত্তে খজক কোণ ঘচঙ সহিত সমান। এবং কগখ, ঘচঙ সহিত

angle BHA of the triangle AHC is equal to its interior opposite angle BCA: which is impossible (16. 1.); wherefore BC is not unequal to EF, that is, it is equal to it; and AB is equal to DE; therefore the two AB, BC, are equal to the two DE, EF, each to each; and they contain equal angles; wherefore, the base AC is equal to the base DF, and the third angle BAC to the third angle EDF. Therefore, *if two triangles, &c.* Q. E. D.

First Case.—Sym. dem. If AB $\neq$ DE cut off GB $=$ DE then $\because$ GB $=$ DE, BC $=$ EF, $\angle$GBC $=$ $\angle$DEF $\therefore$ (4 of 1.) GC $=$ DF and $\triangle$ GBC $=$ $\triangle$ DEF and $\angle$GCB $=$ $\angle$DFE but (by hyp.) $\angle$ACB $=$ $\angle$DFE $\therefore$ $\angle$GCB $=$ $\angle$ACB which is impossible (9. Ax.) $\therefore$ AB is not $\neq$ DE i. e. AB $=$ DE. $\because$ AB $=$ DE, BC $=$ EF, $\angle$ABC $=$ $\angle$DEF $\therefore$ AC $=$ DF, $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ DEF, $\angle$BAC $=$ $\angle$EDF (4 of 1.)

Second Case.—Sym. dem.—If BC $\neq$ EF cut off BH $=$ EF then $\because$ AB $=$ DE, BH $=$ EF, $\angle$ABC $=$ $\angle$DEF $\therefore$ (4. of 1.) AH $=$ DF and $\angle$BHA $=$ $\angle$DFE but $\angle$DFE $=$ $\angle$ACB $\therefore$ $\angle$BHA $=$ $\angle$ACB which is impossible $\because$ (16. of 1.) $\angle$BHA $>$ $\angle$ACB $\therefore$ BC is not $\neq$ EF i. e. BC $=$ EF. And $\because$ BC $=$ EF, AB $=$ DE, $\angle$ABC $=$ $\angle$DEF $\therefore$ AC $=$ DF, $\triangle$ ABC $=$ $\triangle$ DEF, $\angle$BAC $=$ $\angle$EDF.

PROP. XXVII. THEOR.

If a straight line falling upon two other straight lines makes the alternate angles equal to one another, these two straight lines are parallel.

Let the straight line EF, which falls upon the two straight lines AB CD, make the alternate angles AEF, EFD equal to one another; AB is parallel to CD.

For, if it be not parallel, AB and CD being produced shall meet either towards B, D, or towards A, C; let them be produced and meet towards B, D in the point G; therefore GEF is a triangle, and its exterior

সমান হওয়াতে খজক, কগখ সহিত সমান, পরন্তু (১৬ প্র.) বহিঃস্থ কোণ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণ হইতে বৃহত্তর স্তরাং খজক, কগখ সমান হওয়া অসাধ্য, অতএব খগ, ঙচ সহিত বিষম নহে অর্থাৎ সমান, এবং কখ, ঘঙ সমান হওয়াতে কখ ও খগ, ও ঘঙ ও ঙচ সহিত সমান তাহাদের মধ্যবর্ত্তি কোণও সমান স্তরাং (৪ প্র.) কগ ভূমি ঘচ সহিত এবং খকগ কোণ ঙঘচ সহিত সমান। অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে, ইত্যাদি।

সং. উ.। ১ প্রকরণ। যদি কখ $\neq$ ঘঙ তবে ছখ $=$ ঘঙ কর। $\because$ ছখ $=$ ঘঙ, খগ $=$ ঙচ, $\angle$ছখগ $=$ $\angle$ঘঙচ $\therefore$ (৪ প্র.) ছগ $=$ ঘচ, $\triangle$ ছখগ $=$ $\triangle$ ঘঙচ, এবং $\angle$ছগখ $=$ $\angle$ঘচঙ। কিন্তু (কল্পনা) $\angle$কগখ $=$ $\angle$ঘচঙ $\therefore$ $\angle$ছগখ $=$ $\angle$কগখ। ইহা অসাধ্য (৯ স্ব. সা.) $\therefore$ কখ $\neq$ ঘঙ নহে অর্থাৎ কখ $=$ ঘঙ। $\because$ কখ $=$ ঘঙ, খগ $=$ ঙচ, $\angle$কখগ $=$ $\angle$ঘঙচ $\therefore$ কগ $=$ ঘচ, $\triangle$ কখগ $=$ $\triangle$ ঘঙচ, $\angle$খকগ $=$ $\angle$ঙঘচ (৪ প্র.)।

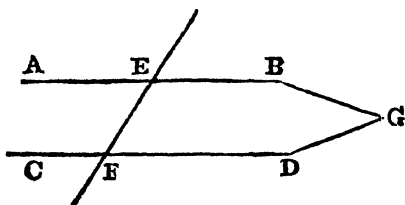
২ প্রকরণ। যদি খগ $\neq$ ঙচ তবে খজ $=$ ঙচ কর। $\because$ কখ $=$ ঘচ, খজ $=$ ঙচ, $\angle$কখগ $=$ $\angle$ঘঙচ $\therefore$ (৪ প্র.) কজ $=$ ঘচ, $\angle$খজক $=$ $\angle$ঘচঙ কিন্তু $\angle$ঘচঙ $=$ $\angle$কগখ $\therefore$ $\angle$খজক $=$ $\angle$কগখ। ইহা অসাধ্য $\because$ (১৬ প্র.) $\angle$খজক $>$ $\angle$কগখ $\therefore$ খগ $\neq$ ঙচ নহে অর্থাৎ খগ $=$ ঙচ। অপর $\because$ খগ $=$ ঙচ, কখ $=$ ঘঙ, $\angle$কখগ $=$ $\angle$ঘঙচ $\therefore$ কগ $=$ ঘচ, $\triangle$ কখগ $=$ $\triangle$ ঘঙচ, $\angle$খকগ $=$ $\angle$ঙঘচ।

২৭ প্রতিজ্ঞা— উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে যদি এক পার্শ্বস্থ কোণ অপর পার্শ্বস্থ কোণের সহিত সমান হয় তবে ঐ দুই সরল রেখা সমানান্তরাল হইবে।

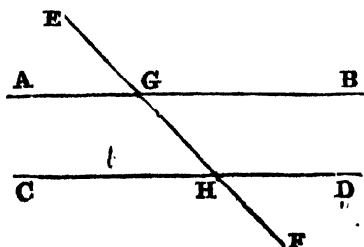
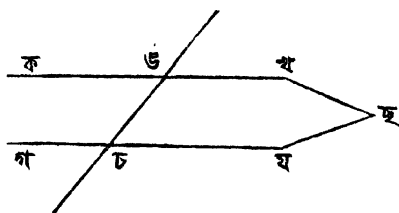
ঙচ সরল রেখা কখ ও গঘ সরল রেখার উপর পড়িয়া ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ অর্থাৎ কঙচ ও ঙচঘ সমান করুক, তবে কখ, গঘ সমানান্তরাল হইবে।

angle AEF is greater (16. 1.) than the interior opposite angle EFG; but it is also equal to it, which is impossible; therefore AB and CD being produced, do not meet towards B, D. In like manner, it may be demonstrated,

that they do not meet towards A, C; but those straight lines which meet neither way, though produced ever so far, are parallel (30. Def.) to one another. AB therefore is parallel to CD. Wherefore, *if a straight line, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. If AB ∦ CD they must meet, and EGF then is a △ ∴ ∠AEF ⁊ ∠EFD (16. of 1.) but (by Hyp.) ∠AEF = ∠EFD ∴ AB ∥ CD.

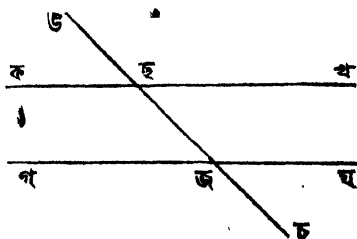
PROP. XXVIII. THEOR.

If a straight line falling upon two other straight lines makes the exterior angle equal to the interior opposite angle, upon the same side of the line; or makes the interior angles upon the same side together equal to two right angles; the two straight lines are parallel to one another.

Let the straight line EF, which falls upon the two straight lines AB, CD, make the exterior angle EGB equal to GHD, the interior opposite angle upon the same side; or let it make

উপপত্তি। — কখ, গঘ যদি সমানান্তরাল না হয় তবে বৃদ্ধি পাইলে খ, ঘ কিম্বা ক গ দিকে অবশ্য সংলগ্ন হইবে। বৃদ্ধি পাইয়া খ, ঘ দিকে ছ বিন্দুতে সংলগ্ন হউক তাহাতে ছঙচ এক ত্রিভুজ হইল অতএব (১৬ প্র.) বহিস্থ কোণ কঙচ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি ঙচছ হইতে বৃহত্তর কিন্তু ইহাকে সমান কল্পনা করা গিয়াছে সুতরাং ইহা অসাধ্য, এবং কখ, গঘ বৃদ্ধি পাইলে খ, ঘ দিকে সংলগ্ন হইবে না। কঙ, গ দিকে সংলগ্ন হইবে না ইহাও তদ্রূপ উপপন্ন হইবে অতএব বৃদ্ধি পাইলেও কোন দিকে সংলগ্ন না হওয়াতে ইহারা (৩০ সং) সমানান্তরাল। সুতরাং দুই সরল রেখা, ইত্যাদি।

সং উ.। যদি কখ $\nparallel$ গঘ তবে পরস্পর সংস্পর্শ করিবে এবং ঙছচ এক $\triangle$ $\therefore$ $\angle$ কঙচ $>$ $\angle$ঙচঘ (১৬ প্র.) কিন্তু (কল্পনাতে) $\angle$কঙচ $=$ $\angle$ ঙচঘ $\therefore$ কখ $\parallel$ গঘ।

২৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাতে যদি তাহার এক পার্শ্বের বহিস্থ কোণ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণের সমান হয় অথবা যদি এক পার্শ্বের দুই অন্তরস্থ কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণ তুল্য হয় তবে ঐ দুই সরল রেখা সমানান্তরাল।

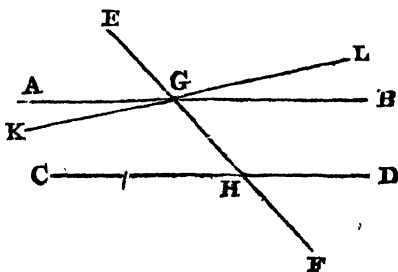
কখ এবং গঘ সরল রেখার উপর ঙচ সরল রেখা পড়িয়া ঙছখ বহিস্থ কোণকে ছজঘ এক পার্শ্বের অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণের সমান করিতেছে এবং এক পার্শ্বের

the interior angles on the same side BGH, GHD together equal to two right angles; AB is parallel to CD.

Because the angle EGB is equal to the angle GHD, and also (15. 1.) to the angle AGH, the angle AGH is equal to the angle GHD; and they are the alternate angles; therefore AB is parallel (27. 1.) to CD. Again, because the angles BGH, GHD are equal (by Hyp.) to two right angles, and AGH, BGH, are also equal (13. 1.) to two right angles, the angles AGH, BGH are equal to the angles BGH, GHD; take away the common angle BGH: therefore, the remaining angle AGH is equal to the remaining angle GHD; and they are alternate angles; therefore, AB is parallel to CD. Wherefore, *if a straight line &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $\angle EGB = \angle GHD$, $\angle AGH = \angle EGB$ (15. of 1.) $\therefore \angle AGH = \angle GHD$ (1. Ax.) $\therefore AB \parallel CD$ (27. of 1.) Again $\angle BGH + \angle GHD = 2$ Rt. $\angle$s and $\angle AGH + \angle BGH = 2$ Rt. $\angle$s (13. of 1.) $\therefore \angle BGH + \angle GHD = \angle AGH + \angle BGH$ (1. Ax.) $\therefore \angle AGH = \angle GHD$ (3. Ax.) $\therefore AB \parallel CD$ (27. of 1.)

PROP. XXIX. THEOR.

If a straight line falls upon two parallel straight lines, it makes the alternate angles equal to one another; and the exterior angle equal to the interior opposite angle, upon the same side; and likewise the two interior angles upon the same side together equal to two right angles.

Let the straight line EF fall upon the parallel straight lines AB, CD; the alternate angles AGH, GHD are equal to one another; and the exterior angle EGB is equal to the interior opposite angle,

অন্তরস্থ কোণ দ্বয়কে অর্থাৎ খছজ এবং ছজঘ একত্র দুই সমকোণের তুল্য করিতেছে অতএব কখ এবং গঘ সমানান্তরাল হইবে।

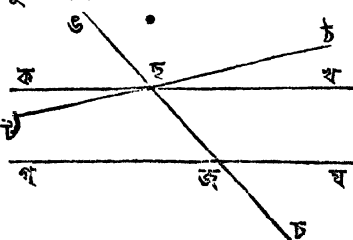
উপপত্তি। ঙছখ কোণ ছজঘ সমান এবং কছজ সহিতও সমান (১৫ প্র.) সুতরাং (১ স্ব. সা) কছজ, ছজঘ সমান, আর ইহারাই ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ, অতএব (২৭ প্র.) কখ এবং গঘ সমানান্তরাল। পুনশ্চ খছজ এবং ছজঘ কোণ দ্বয় দুই সমকোণ তুল্য এবং খছজ ও কছজ কোণ দ্বয়ও দুই সমকোণ তুল্য (১৩ প্র.) অতএব খছজ ও ছজঘ একত্র খছজ ও কছজ সহিত সমান সুতরাং সামান্য কোণ খছজ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট কছজ ও ছজঘ পরস্পর সমান আর ইহারাই ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ অতএব কখ ও গঘ সমানান্তরাল। এই রূপে দুই সরল রেখার উপর, ইত্যাদি।

সং. উ.। ∠ঙছখ = ∠ঙজঘ, ∠কছজ = ∠ঙছখ (১৫ প্র.) ∴ ∠কছজ = ∠ছজঘ (১ স্ব. সা.) ∴ কখ ।। গঘ (২৭ প্র.)। অপিচ, ∠খছজ + ∠ছজঘ = ২ সম কোণ এবং ∠কছজ + খছজ = ২ সমকোণ ∠(১৩ প্র.) ∴ ∠খছজ + ∠ছজঘ = ∠কছজ + খছজ ∴ ∠কছজ = ∠ছজঘ (৩ স্ব. সা.) ∴ কখ ।। গঘ (২৭ প্র.)।

২৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সমানান্তরাল সরল রেখার উপর কোন সরল রেখার সম্পাত হইলে এক পার্শ্বস্থ কোণ অপর পার্শ্বস্থ কোণের সমান হইবে ও এক পার্শ্বের বহিঃস্থ কোণ অন্তরস্থ সম্মু[illegible] কোণের সমান হইবে এবং এক পার্শ্বের দুই অন্তরস্থ[illegible] একত্র যোগে দুই সমকোণ তুল্য হইবে।

কখ ও গঘ সমানান্তরাল রেখা, ঙচ তাহাদের উপর পড়িতেছে। অতএব কছজ, ছজঘ ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ পরস্পর সমান হইবে এবং বহিঃস্থ কোণ ঙছখ অন্তরস্থ সম্মু-

upon the same side, GHD; and the two interior angles BGH, GHD, upon the same side, are together equal to two right angles.

For if AGH be not equal to GHD, let KG be drawn, making the angle KGH equal to GHD, and produce KG to L; then KL will be parallel to CD (27. 1.); but AB is also parallel to CD; therefore two straight lines are drawn through the same point G, parallel to CD, and yet not coinciding with one another, which is impossible (11. Ax.). The angles AGH, GHD therefore are not unequal, that is, they are equal to one another. Now, the angle EGB is equal to AGH (15. 1.); and AGH has been proved to be equal to GHD:—therefore, EGB is likewise equal to GHD:—add to each of these the angle BGH; therefore, the angles EGB BGH are equal to the angles BGH, GHD, but EGB, BGH are equal (13. 1.) to two right angles; therefore BGH, GHD are also equal to two right angles. Wherefore, *if a straight line, &c.* Q. E. D.

Cor. *If two lines KL and CD make, with EF, the two angles KGH, GHC taken together less than two right angles, KG and CH will meet on the side of EF on which the two angles are, that are less than two right angles.*

For if not, KL and CD are either parallel, or they meet on the other side of EF; but they are not parallel; for the angles KGH, GHC would then be [illegible] to two right angles. Neither do they meet on [illegible]ther side of EF; for the angles LGH, GHD would then be two angles of a triangle, and less than two right angles; but this is impossible; for the four angles KGH, HGL, CHG, GHD are together equal to four right angles (13. 1.), of which the two, KGH, CHG are by supposition less than two right angles; therefore, the other two, HGL, GHD are greater than two right angles. Therefore, since KL and CD are not parallel, and since they do not meet towards L and D, they must meet if produced towards K and C.

খবর্ত্তি কোণ ছজঘ সমান হইবে ও এক পার্শ্বের দুই অন্তরস্থ কোণ খছজ ও ছজঘ একত্র দুই সমকোণ তুল্য হইবে।

উ.। যদি কছজ, ছজঘ সমান না হয় তবে টছজ, ছজঘ সমান করত টছ সরলরেখা টানিয়া ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর তাহাতে (২৭ প্র.) টঠ, গঘ সমানান্তরাল হইবে কিন্তু কখ, গঘ সমানান্তরাল সুতরাং কখ, টঠ সম্যক না মিলিয়া কেবল এক বিন্দুতে সংস্পর্শ করিয়া উভয়ে গঘ সমানান্তরাল হয় ইহা অসাধ্য (১১ স্ব. সা.)। অতএব কছজ ও ছজঘ কোণ দ্বয় পরস্পর বিষম নহে অর্থাৎ সমান। অপর ঙছখ, কছজ সমান (১৫ প্র.) সুতরাং ঙছখ ও ছজঘ সমান এবং ইহাতে খছজ যোগ করিলে ঙছখ ও খছজ এবং ছজঘ ও খছজ একত্র সমান। পরন্তু ঙছখ ও খছজ দুই সমকোণ তুল্য (১৩ প্র.) সুতরাং ছজঘ ও খছজ দুই সমকোণ তুল্য। অতএব দুই সমানান্তরাল সরল রেখার উপর, ইত্যাদি।

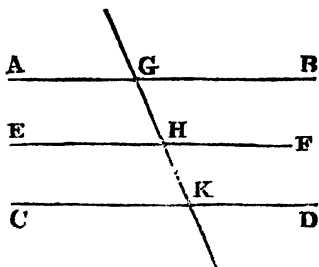
অনুমান। যদি টঠ এবং গঘ দুই সরল রেখা ঙচ সরল রেখা সংযোগে টছজ এবং ছজগ কোণ দ্বয়কে একত্র দুই সমকোণের ন্যূন করে তবে এই দুই কোণের দিকে বৃদ্ধি পাইলে কোন স্থানে পরস্পর সংস্পর্শ করিবে। কেননা যদি না সংস্পর্শ করে তবে হয় সমানান্তরাল হইবে নতুবা ঙচ সরল রেখার অন্য দিকে সংস্পর্শ করিবে। কিন্তু তাহারা সমানান্তরাল নহে কেননা তাহা হইলে টছজ ও ছজগ কোণ দ্বয় দুই সম কোণের সমান হইত। এবং ঙচ রেখার অন্য দিকেও সংস্পর্শ করিবে না কেননা তাহা হইলে ঠছজ ও ছজঘ ত্রিভুজের দুই কোণ হইয়া দুই সমকোণের ন্যূন হইত ফলত তাহা অসাধ্য কেননা টছজ, জছঠ, গজছ, ছজঘ এই চারি কোণ (১৩ প্র.) চারি সমকোণ তুল্য তাহার মধ্যে টছজ ও ছজগ দুই সমকোণের ন্যূন কল্পিত হইয়াছে সুতরাং জছঠ ও ছজঘ দুই সম কোণের অধিক হইবে। অতএব টঠ এবং গঘ সমানান্তরাল না হওয়াতে ও ঠ, ঘ দিকে সংস্পর্শ না করাতে অবশ্য ট, গ দিকে সংস্পর্শ করিবে।

Sym. dem. If $\angle AGH \neq \angle GHD$ make $KGH = GHD$ (23 of 1) $\therefore$ KL ∥ CD (27 of 1) but AB ∥ CD (by Hyp.) This is impossible (11 Ax.) $\therefore \angle AGH = \angle GHD$ And $\because \angle AGH = \angle EGB$ (15 of 1) $\therefore \angle GHD = \angle EGB$ (1 Ax.) $\therefore \angle GHD + \angle BGH = \angle EGB + \angle BGH$ (2 Ax.) = 2 Rt. ∠s (13 of 1.)

PROP. XXX. THEOR.

Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel to one another

Let AB, CD, be each of them parallel to EF; AB is also parallel to CD.

Let the straight line GHK cut AB, EF, CD; and because GHK cuts the parallel straight lines AB EF, the angle AGH is equal (29. 1.) to the angle GHF. Again, because the straight line GK cuts the parallel straight lines EF, CD, the angle GHF is equal (29. 1.) to the angle GKD; and it was shown that the angle AGK is equal to the angle GHF; therefore also AGK is equal to GKD; and they are alternate angles; therefore AB is parallel (27. 1.) to CD. Wherefore, *straight lines &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $\because$ AB ∥ EF, $\angle AGH = \angle GHF$ (29 of 1.) And $\because$ EF ∥ CD $\angle GHF = \angle HKD$ (29 of 1) $\therefore \angle AGH = \angle HKD$ (1 Ax.) $\therefore$ AB ∥ CD.

PROP. XXXI. PROB.

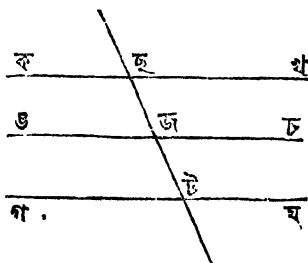
To draw a straight line through a given point parallel to a given straight line.

Let A be the given point, and BC the given straight

সং. উ.। যদি ∠কছজ ≠ ∠ছজঘ তবে টছজ = ছজঘ কর (২৩ প্র.) ∴ টঠ ∥ গঘ (২৭ প্র.) কিন্তু (কল্পনাতে) কখ ∥ গঘ। ইহা অসাধ্য (১১ স্ব. সা.) ∴ ∠কছজ = ∠ছজঘ। অপর ∵ ∠কছজ = ∠ঙছখ (১৫ প্র.) ∠ছজঘ = ∠ঙছখ (১ স্ব. সা.) ∠ছজঘ + ∠খছজ = ∠ঙছখ + ∠খছজ = ২ সম ∠

৩০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

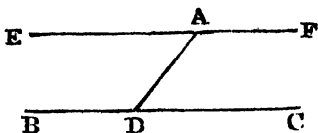
যে২ সরল রেখা কোন এক সরল রেখার সমানান্তরাল তাহারা পরস্পরও সমানান্তরাল।

কখ ও গঘ উভয়ে ঙচ সহিত সমানান্তরাল অতএব কখ ও গঘ পরস্পরও সমানান্তরাল হইবে। ছজট সরল রেখা কখ ঙচ এবং গঘ রেখার উপর পড়ুক। ছজট সরল রেখা কখ ও ঙচ সমানান্তরাল সরল রেখার উপর পড়িতেছে অতএব (২৯ প্র.) কছজ কোণ ছজচ কোণের সমান, এবং ছট রেখা ঙচ ও গঘ সমানান্তরাল রেখার উপর পড়িতেছে অতএব ছজচ কোণ জটঘ সমান, সুতরাং কছজ, জটঘ সমান (১ স্ব. সা.) ইহারাই ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ, অতএব (২৭ প্র.) কখ ও গঘ সমানান্তরাল। সুতরাং যে২ সরল রেখা, ইত্যাদি।

সং. উ.। ∵ কখ ∥ ঙচ, ∠কছজ = ∠ছজচ (২৯ প্র.) এবং ∵ ঙচ ∥ গঘ, ∠ছজচ = ∠জটঘ (২৯ প্র.) ∴ ∠কছজ = ∠জটঘ (১ স্ব. সা.) ∴ কখ ∥ গঘ।

৩১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

নির্দ্দিষ্ট বিন্দু দিয়া নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার সমানান্তরাল সরল রেখা টানিতে হইবে।

ক এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু, খগ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, ক বিন্দু দিয়া খগ রেখার সমানান্তরাল রেখা টানিতে হইবে।

line; it is required to draw a straight line through the point A, parallel to the straight line BC.

In BC take any point D, and join AD; and at the point A, in the straight line AD, make (23. 1.) the angle DAE equal to the angle ADC; and produce the straight line EA to F.

Because the straight line AD, which meets the two straight lines BC, EF, makes the alternate angles EAD, ADC equal to one another, EF is parallel (27. 1.) to BC. Therefore, the straight line EAF is drawn through the given point A, parallel to the given straight line BC. Which was to be done.

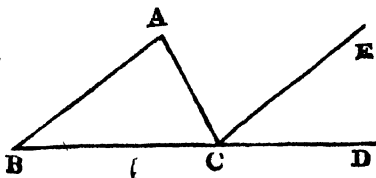
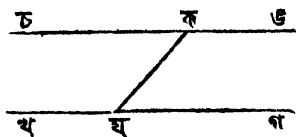
Sym. dem. $\angle DAE = \angle ADC$ (by constr.) $\therefore$ EF $\parallel$ BC (27 of 1.)

PROP. XXXII. THEOR.

If a side of any triangle is produced, the exterior angle is equal to the two interior opposite angles; and the three interior angles of every triangle are equal to two right angles.

Let ABC be a triangle, and let one of its sides BC be produced to D; the exterior angle ACD is equal to the two interior opposite angles CAB, ABC; and the three interior angles of the triangle, viz. ABC, BCA, CAB, are together equal to two right angles.

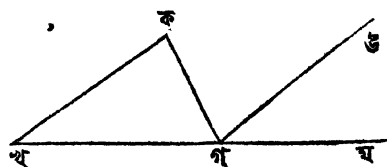
Through the point C draw CE parallel (31. 1.) to the straight line AB; and because AB is parallel to CE, and AC meets them, the alternate angles BAC, ACE are equal (29. 1.). Again, be-

খগ মধ্যে কোন বিন্দুর নির্দ্দেশ কর যথা ঘ, এবং ক ঘ সংযুক্ত কর, অপর কঘ রেখার ক বিন্দুতে কঘগ সমান এক কোণ (অর্থাৎ ঘকচ) (২৩ প্র.) অঙ্কিত করিয়া ঙ পর্য্যন্ত চক বৃদ্ধি কর।

ঙচ ও খগ রেখার উপর কঘ রেখার পাতে ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ চকঘ ও কঘগ পরস্পর সমান হওয়াতে ঙচ ও খগ সমানান্তরাল (২৭ প্র.)। এই রূপে ক দিয়া খগ সমানান্তরাল চ টানা হইল।

সং উ.। ∠ঘকচ = ∠কঘগ (অঙ্কপাত) ∴ ঙচ ॥ খগ (২৭ প্র.)।

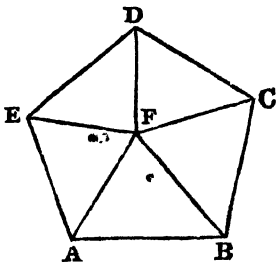
৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের কোন বাহুর বৃদ্ধি করিলে বহিস্থ কোণ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণ দ্বয়ের সমান হইবে এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের তিন অন্তরস্থ কোণ একত্র যোগে দুই সমকোণ তুল্য হইবে।

কখগ এক ত্রিভুজ তাহার এক বাহু অর্থাৎ খগ, ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইয়াছে। কগঘ বহিস্থ কোণ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কোণ দ্বয় কখগ, গকখ উভয়ের যোগ তুল্য, এবং তিন অন্তরস্থ কোণ অর্থাৎ কখগ, খগক এবং গকখ একত্র দুই সম কোণ তুল্য।

উ.। গ বিন্দু হইতে গঙ, কখ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান। কখ ও ঙগ সমানান্তরাল সুতরাং কগ দ্বারা তাহাদের সংস্পর্শ হওয়াতে কগঙ ও খকগ ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান (২৯ প্র.)। পুনশ্চ কখ ও ঙগ সমানান্তরাল সুতরাং খঘ তাহাদিগকে সংস্পর্শ করাতে বহিঃস্থ কোণ ঙগঘ

cause AB is parallel to CE, and BD falls upon them, the exterior angle ECD is equal to the interior opposite angle ABC; but the angle ACE was shown to be equal to the angle BAC; therefore, the whole exterior angle ACD is equal to the two interior opposite angles CAB, ABC; to these angles add the angle ACB, and the angles ACD, ACB are equal to the three angles CBA, BAC, ACB; but the angles ACD, ACB are equal (13. 1.) to two right angles; therefore also the angles CBA, BAC, ACB are equal to two right angles. Wherefore. *if a side of a triangle, &c.* Q. E. D.

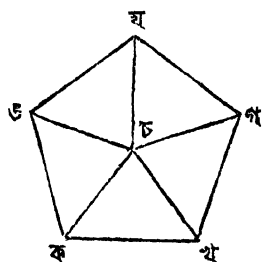
COR. 1. *All the interior angles of any rectilineal figure are equal to twice as many right angles as the figure has sides, wanting four right angles.*

For any rectilineal figure ABCDE can be divided into as many triangles as the figure has sides, by drawing straight lines from a point F within the figure to each of its angles. And, by the preceding proposition, all the angles of these triangles are equal to twice as many right angles as there are triangles, that is, as there are sides of the figure; and the same angles are equal to the angles of the figure, together with the angles at the point F, which is the common vertex of the triangles: that is, (2. cor. 15. 1.) together with four right angles. Therefore, twice as many right angles as the figure has sides, are equal to all the angles of the figure, together with four right angles, that is, *the angles of the figure are equal to twice as many right angles as the figure has sides, wanting four.*

COR. 2. *All the exterior angles of any rectilineal figure are together equal to four right angles*

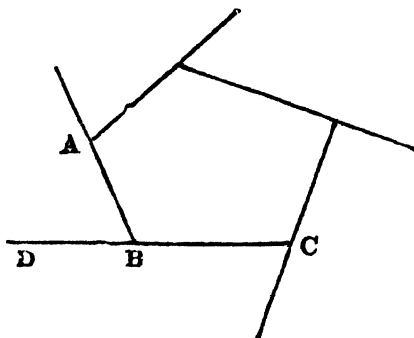
Because every interior angle ABC, with its adjacent exterior ABD, is equal (13. 1.) to two right angles;

অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কখগ সহিত সমান অতএব খকগ ও কখগ ইহাদের যোগ কগঙ ও ঙগঘ ইহাদের যোগ (অর্থাৎ বহিস্থ কোণ কগঘ) তুল্য, পরে উভয়তঃ খগক যোগ করিলে খকগ ও কখগ ও খগক একত্র কগঘ ও খগক তুল্য। কগঘ ও খগক দুই সমকোণ তুল্য (১৩ প্র.)। সুতরাং খকগ ও কখগ ও খগক দুই সমকোণ তুল্য, অতএব ত্রিভুজের কোন বাহুর, ইত্যাদি।

১ অনুমান—সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তরস্থ কোণ সকলের একত্র যোগে ঐ ক্ষেত্রের যত বাহু আছে তাহার দ্বিগুণিত চতুরূন সমকোণের তুল্য হইবে।

উপপত্তি। কেননা কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের মধ্যে (যথা কখগ ঘঙ) এক বিন্দু (যথা চ) নির্দ্দেশ করিয়া ক্ষেত্রের সমস্ত কোণ চিহ্নের সহিত সংযুক্ত করিলে ক্ষেত্রের যত বাহু আছে তত ত্রিভুজ হইবে এবং উক্ত প্রতিজ্ঞানুসারে এই ত্রিভুজ সমূহের সমস্ত কোণ যত ত্রিভুজ আছে তাহার দ্বিগুণ সমকোণ তুল্য, আর সেই কোণ সমূহ ক্ষেত্রস্থ কোণ ও তন্মধ্য চ বিন্দুস্থ কোণের যোগ তুল্য, কেননা এই চ বিন্দু ত্রিভুজ সমূহের সাধারণ শৃঙ্গ কিন্তু এই বিন্দুস্থ কোণ (১৫ প্র. ২ অনুমান) চারি সমকোণ তুল্য অতএব ক্ষেত্রের কোণ সমূহে চারি সমকোণ যোগ করিলে উক্ত ত্রিভুজের সকল কোণের তুল্য হইবে, সুতরাং ক্ষেত্রের কোণ যত বাহু আছে তাহার দ্বিগুণ চতুরূন সমকোণ তুল্য।

২ অনুমান— সরল রৈখিক ক্ষেত্রের বহিস্থ সকল কোণ একত্র যোগে চারি সমকোণের তুল্য হয়।

উ.। প্রত্যেক অন্তরস্থ কোণ যথা কখগ বহিস্থ যথা কখঘ সহিত যোগে দুই সমকোণ তুল্য (১৩ প্র.), অতএব

therefore all the interior, together with all the exterior angles of the figure, are equal to twice as many right angles as the figure has sides; that is, by the foregoing corollary, they are equal to all interior angles of the figure, together with four right angles; therefore, *all the exterior angles are equal to four right angles.*

Sym. dem. ∠ACE = ∠BAC and ∠ECD = ∠ABC (29 of 1) ∵ ∠ACD = ∠ACE + ∠ECD = ∠BAC + ∠ABC (2 Ax.) ∴ ∠BAC + ∠ABC + ∠ACB = ∠ACD + ∠ACB (2 Ax.) = 2 Rt. ∠s. (13 of 1).

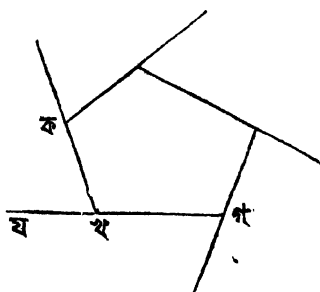
Cor. 1. All ∠s of the △s = ∠s of the Figure + ∠s at F ∴. ∠s of the Figure = ∠s of the △s — ∠s at F. = ∠s of the △s — 4 Rt. ∠s (2 Cor. 15 of 1.) But there are as many △s as there are sides to the Fig. ∴. ∠s of the △s = 2 as many Rt. ∠s as there are sides to the Fig. ∴. ∠s of the Fig. = 2 as many Rt. ∠s as there are sides to the Fig. — 4 Rt. ∠s.

Cor. 2. ∵ Every int. ∠ (as ABC) + its ext. ∠ (as ABD) = 2 rt. ∠s (13. of 1.) ∴. All int. ∠s + ext. ∠s = 2 as many rt. ∠s as the figure has sides i. e. all int. ∠s + all ext. ∠s = all int. ∠s + 4 rt. ∠s ∴. all ext. ∠s = 4 rt. ∠s (3 Ax.)

PROP. XXXIII. THEOR.

The straight lines which join the extremities of two equal and parallel straight lines, towards the same parts, are themselves equal and parallel.

Let AB, CD, be equal and parallel straight lines, and joined towards the same parts by the straight lines AC, BD; AC, BD are also equal and parallel.

সকল অন্তরস্থ ও বহিস্থ কোণ একত্র যোগে ক্ষেত্রের যত বাহু আছে তাহার দ্বিগুণ সমকোণ তুল্য, এবং পূর্ব্বোক্ত অনুমানানুসারে তাহারাই অন্তরস্থ কোণ ও চারি সমকোণের যোগ তুল্য অতএব বহিস্থ কোণ সমূহ চারি সমকোণ তুল্য।

সং. উ.। ∠কগঙ = ∠খকগ, এবং ঙগঘ = ∠কখগ (২৯ প্র.) ∴ ∠কগঘ = ∠কগঙ + ∠ঙগঘ = ∠খকগ + ∠কখগ (২ স্ব সা.) ∴ ∠খকগ + ∠কখগ + ∠কগখ = ∠কগঘ + ∠কগখ = ২ সম ∠ (১৩ প্র.)।

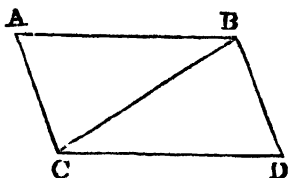
১ অনুমান। △ ∠ সমূহ = ক্ষেত্র ∠ + চ ∠সমূহ, ∴ ক্ষেত্র ∠সমূহ = △ ∠সমূহ − চ ∠সমূহ = △ ∠সমূহ − ৪ সম ∠ (১৫ প্র. ২ অনু.)। ক্ষেত্রের যত বাহু তত △, ∴ △ ∠সমূহ = ক্ষেত্রে যত বাহু তাহার দ্বিগুণ সম ∠, ∴ ক্ষেত্র ∠সমূহ = ক্ষেত্রে যত বাহু তাহার দ্বিগুণ সম ∠ − ৪ সম ∠।

২ অনু.। প্রত্যেক অন্তরস্থ ∠ (যথা কখগ) + তদ্বহিস্থ ∠ (যথা কখঘ) = ২ সম ∠(১৩ প্র.) ∴ সকল অন্তরস্থ ∠ + সকল বহিঃস্থ ∠ = ক্ষেত্রে যত বাহু তাহার দ্বিগুণ সম ∠ অর্থাৎ সকল অন্তরস্থ ∠ + সকল বহিঃস্থ ∠ = সকল অন্তরস্থ ∠ + ৪ সম ∠, ∴ সকল বহিঃস্থ ∠ = ৪ সম ∠ (৩ স্ব. সা.)।

৩৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই তুল্য এবং সমানান্তরাল সরল রেখার প্রান্তদ্বয় যে দুই সরল রেখা দ্বারা এক২ দিকে সংযুক্ত হয় তাহারাও পরস্পর তুল্য ও সমানান্তরাল।

কখ ও গঘ রেখাদ্বয় তুল্য ও সমানান্তরাল, কগ ও খঘ রেখা তাহাদিগকে এক২ দিকে সংযুক্ত করে অতএব কগ ও খঘ

Join BC; and because AB is parallel to CD, and BC meets them, the alternate angles ABC, BCD are equal (29. 1.): and because AB is equal to CD, and BC common to the two triangles ABC, DCB, the two sides AB. BC are equal to the two DC, CB; and the angle ABC is equal to the angle BCD; therefore the base AC is equal (4. 1.) to the base BD, and the triangle ABC to the triangle BCD, and the other angles to the other angles (4. 1.), each to each, to which the equal sides are opposite; therefore, the angle ACB is equal to the angle CBD; and because the straight line BC meets the two straight lines AC, BD, and makes the alternate angles ACB, CBD equal to one another, AC is parallel (27. 1.) to BD; and it was shown to be equal to it. Therefore, *straight lines, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. ∵ AB ∥ CD, ∴ ∠ABC = ∠BCD (29 of 1.) And ∵ AB = CD, BC common to △s ABC, BCD and ∠ABC = ∠BCD ∴ (4 of 1.) AC = BD, and ∠ACB = ∠CBD ∴ also AC ∥ BD (27 of 1.)

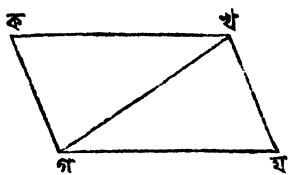
PROP. XXXIV. THEOR.

The opposite sides and angles of a parallelogram are equal to one another, and the diagonal bisects it, that is, divides it into two equal parts.

N. B.—A Parallelogram is a four-sided figure, of which the opposite sides are parallel; and the diagonal is the straight line joining two of its opposite angles.*

Let ACDB be a parallelogram, of which BC is a diagonal; the opposite sides and angles of the figure are equal to one another; and the diagonal BC bisects it.

* The symbol ▭ is used to express a parallelogram.

তুল্য ও সমানান্তরাল। খ, গ সংযুক্ত কর, কখ গঘ সমানান্তরাল, খগ তাহাদিগকে সংস্পর্শ করে, অতএব কখগ ও খগঘ ভিন্ন২ পার্শ্বের কোণ পরস্পর সমান (২৯ প্র.), অপর কখ, গঘ সমান ও খগ, কখগ ও খগঘ এ উভয়ের সাধারণ বাহু এবং কখগ, খগঘ মধ্যবর্ত্তি কোণ দ্বয় সমান এই কারণ কগ ভূমি খঘ ভূমির তুল্য এবং কখগ ত্রিভুজ খগঘ ত্রিভুজের সমান এবং সমান২ বাহুর সম্মুখস্থ অন্যান্য কোণও সমান সুতরাং কগখ, গখঘ সহিত সমান। এবং খগ, কগ ও খঘ রেখা দ্বয়ের উপর পড়িয়া ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ কগখ ও গখঘ সমান করাতে (২৭ প্র.) কগ ও খঘ পরস্পর সমানান্তরাল, আর পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে ইহারা সমান। অতএব দুই তুল্য এবং সমানান্তরাল, ইত্যাদি।

সং উ.। ∵ কখ ‖ গঘ, ∠কখগ = ∠খগঘ (২৯ প্র.) এবং ∵ কখ = গঘ, খগ, △ কখগ, খগঘ উভয়ের সামান্য বাহু ও ∠কখগ = ∠খগঘ ∴ (৪ প্র.) কগ = খঘ, ∠কগখ = ∠ গখঘ ∴ কগ ‖ খঘ (২৭ প্র)।

৩৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

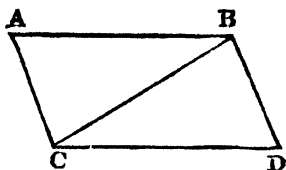
সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্মুখবর্ত্তি বাহু ও কোণ পরস্পর সমান এবং তাহার কর্ণ ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করে।

*** যে চতুর্ভুজের সম্মুখস্থ বাহু সমানান্তরাল তাহার নাম সমানান্তরাল ক্ষেত্র এবং যে সরল রেখাদ্বারা দুই সম্মুখস্থ কোণ সংযুক্ত হয় তাহার নাম কর্ণ*।

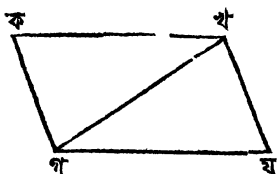
কগঘখ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, খগ তাহার কর্ণ, এই ক্ষেত্রের সম্মুখবর্ত্তি বাহু ও কোণ পরস্পর সমান এবং কর্ণ

---

* সমানান্তরাল ক্ষেত্রের চিহ্ন এই ▭।

Because AB is parallel to CD, and BC meets them, the alternate angles ABC, BCD are equal (29. 1.) to one another; and because AC is parallel to BD and BC meets them, the alternate angles ACB, CBD are equal (29. 1.) to one another; wherefore the two triangles ABC, CBD have two angles ABC, BCA in the one, equal to two angles BCD, CBD in the other, each to each, and the side BC, which is adjacent to these equal angles, common to the two triangles; therefore their other sides are equal, each to each, and the third angle of the one to the third angle of the other (26. 1.) *viz.* the side AB to the side CD, and AC to BD, and the angle BAC equal to the angle BDC. And because the angle ABC is equal to the angle BCD, and the angle CBD to the angle ACB, the whole angle ABD is equal to the whole angle ACD: And the angle BAC has been shown to be equal to the angle BDC; therefore the opposite sides and angles of a parallelogram are equal to one another: also, its diagonal bisects it; for AB being equal to CD, and BC common, the two AB, BC are equal to the two DC, CB, each to each; now the angle ABC is equal to the angle BCD; therefore the triangle ABC is equal (4. 1.) to the triangle BCD, and the diagonal BC divides the parallelogram ACDB into two equal parts. Therefore, *the opposite*, &c. Q. E. D.

Sym. dem. ∵ AB ∥ CB, ∠ABC = ∠BCD (29 of 1.) ∵ AC ∥ BD, ∠ACB = ∠CBD ∴ ∠s ABC + ACB = ∠s BCD + CBD each to each and CB common to △s ABC and BDC ∴ (26 of 1.) AB = CD, AC = BD, ∠BAC = ∠BDC ∴ also (4 of 1.) △ ABC = △ BDC and ∠ABC + ∠CBD (or ∠ABD) = ∠BCD + ∠ACB (or ∠ACD.) (2 Ax.)

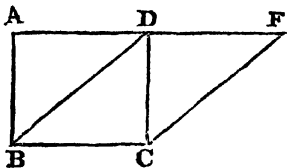
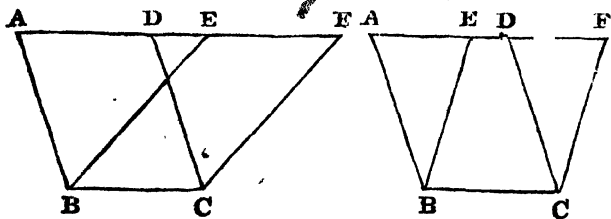
ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিতেছে।

উ.। কখ ও গঘ সমানান্তরাল, খগ তাহাদিগকে স্পর্শ করিতেছে, অতএব কখগ ও খগঘ দুই ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ পরস্পর সমান (২৯ প্র.)। এবং কগ ও খঘ সমানান্তরাল, খগ তাহাদিগকে স্পর্শ করিতেছে অতএব ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ কগখ ও গখঘ পরস্পর সমান। সুতরাং কখগ ও গখঘ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই কোণ অর্থাৎ কখগ ও খগক অন্যটীর দুই কোণ খগঘ ও গখঘ সহিত ক্রমশ সমান এবং ঐ সমান কোণ দ্বয়ের সমীপস্থ বাহু খগ দুই ত্রিভুজের সামান্য হওয়াতে তাহাদের অন্যান্য বাহু ক্রমশ সমানও একটীর তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান অর্থাৎ কখ গঘ সমান, কগ খঘ সমান, এবং খকগ কোণ খঘগ সমান (২৬ প্র.)। কখগ কোণ খগঘ সমান, এবং গখঘ, খগক সমান হওয়াতে সমুদয় কখঘ কোণ কগঘ সমান হইবে, আর পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে খকগ কোণ খঘগ সমান, অতএব সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্মুখবর্ত্তি বাহু ও কোণ পরস্পর সমান এবং কর্ণ তাহাকে দ্বিখণ্ড করে। কেননা কখ, গঘ সমান ও খগ সামান্য হওয়াতে কখ খগ ক্রমশ ঘগ গখ সহিত সমান এবং কখগ কোণ খগঘ সমান সুতরাং (৪ প্র.) কখগ ত্রিভুজ খগঘ সহিত সমান এবং কগঘখ সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ কর্ণ দ্বারা দ্বিখণ্ড হইল।

সং উ.। ∵ কখ ‖ গঘ, ∴ ∠কখগ = ∠খগঘ (২৯ প্র.)। ∵ কগ ‖ খঘ, ∴ ∠কগখ = ∠গখঘ। ∵ ∠কখগ + ∠কগখ (ক্রমশ) = ∠খগঘ + ∠গখঘ এবং গখ △ কখগ, খঘগ উভয়ের সামান্য, ∴ (২৬ প্র.) কখ = গঘ, কগ = খঘ, ∠খকগ = ∠খঘগ, ∴ (৪ প্র.) △ কখগ = △ খঘগ, ও (২ স্ব.সা.) ∠কখগ + ∠গখঘ (অর্থাৎ ∠কখঘ) = ∠খগঘ + ∠কগখ (অর্থাৎ ∠কগঘ)।

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelograms upon the same base, and between the same parallels, are equal to one another.

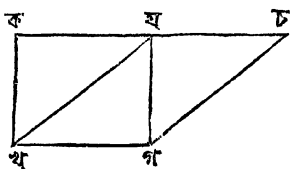
Let the parallelograms ABCD, EBCF* be upon the same base BC, and between the same parallels AF, BC; the parallelogram ABCD is equal to the parallelogram EBCF.

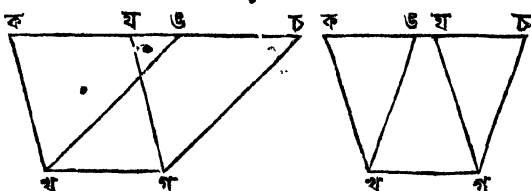
If the sides AD, DF of the parallelograms ABCD, DBCF, opposite to the base BC, be terminated in the same point D; it is plain that each of the parallelograms is double (34. 1.) the triangle BDC; and they are therefore equal to one another.

But, if the sides AD, EF, opposite to the base BC of the parallelograms ABCD, EBCF, be not terminated in the same point; then, because ABCD is a parallelogram, AD is equal (34. 1.) to BC; for the same reason, EF is equal to BC; wherefore AD is equal (1 Ax.) to EF; and DE is common; therefore the whole, or the remainder AE is equal (2 or 3 Ax.) to the whole, or the remainder DF; now AB is also equal to DC; therefore the two EA, AB are equal to

the two FD, DC, each to each; but the exterior angle FDC is equal (29. 1.) to the interior EAB, wherefore

* See the 2nd. and 3rd. figures.

৩৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যেং সমানান্তরাল ক্ষেত্র এক ভূমির উপর এবং একি সমানান্তরালের মধ্যে থাকে তাহারা পরস্পর সমান।

কখগঘ ওঙখগচ* দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ একি ভূমির উপর এবং কচ খগ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঙখগচ সহিত সমান।

কখগঘ ঘখগচ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্রের খগ ভূমির সম্মুখস্থ কঘ ঘচ বাহুর অগ্র যদি ঘ বিন্দুতে হয় তবে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে প্রত্যেক সমানান্তরাল ক্ষেত্র (৩৪ প্র.) খঘগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান (৬ স্ব. সা.)।

কিন্তু কখগঘ ঙখগচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রে খগ ভূমির সম্মুখস্থ কঘ ঙচ বাহুর অগ্র যদি এক বিন্দুতে না থাকে তবে কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র হওয়াতে (৩৪ প্র.) কঘ, খগ সমান। ঐ কারণে ঙচ, খগ সমান সুতরাং (১ স্ব. সা.) কঘ, ঙচ সমান। অতএব সামান্য ঘঙ যোগ বা বিয়োগ করিলে (২ বা ৩ স্ব. সা.) সমুদয় বা অবশিষ্ট কঙ সমুদয় বা অবশিষ্ট ঘচ সমান হইবে।

অপর কখ, গঘ সমান, অতএব ঙক কখ ক্রমশ চঘ ঘগ সহিত সমান এবং (২৯ প্র.) বহিঃস্থ চঘগ কোণ অন্তরস্থ ঙকখ সহিত সমান সুতরাং (৪ প্র.) ঙখ ভূমি চগ ভূমির সমান এবং ঙকখ ত্রিভুজ চঘগ ত্রিভুজের সমান। কখগচ বিষম চতুর্ভুজ

---

* দ্বিতীয় ও তৃতীয় ক্ষেত্রে দৃষ্টি কর।

the base EB is equal to the base FC, and the triangle EAB (4. 1.) to the triangle FDC. Take the triangle FDC from the trapezium ABCF, and from the same trapezium take the triangle EAB; the remainders will then be equal (3. Ax.), that is, the parallelogram ABCD is equal to the parallelogram EBCF. Therefore, *parallelograms upon the same base, &c.* Q. E. D.

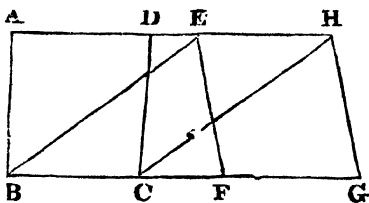
First Case.—Sym. dem. ▭ ABCD = 2 △ DBC (34 of 1.) ▭DBCF = 2△DBC (34 of 1.) ∴ ABCD = DBCF (6 Ax.)

Second Case.—Sym. dem. AD = BC; EF = BC (34 of 1.) ∴ AD = EF ∴ AD + DE = EF + DE i. e. AE = DF; AB = DC (34 of) ∠EAB = ∠FDC (29 of 1.) ∴ △EAB = △FDC (4 of 1.) ∴ ABCF — △EAB = ABCF — △FDC i. e. ▭ABCD = ▭EBCF.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelograms upon equal bases, and between the same parallels, are equal to one another.

Let ABCD, EFGH be parallelograms upon equal bases BC, FG, and between the same parallels AH, BG; the parallelogram ABCD is equal to EFGH.

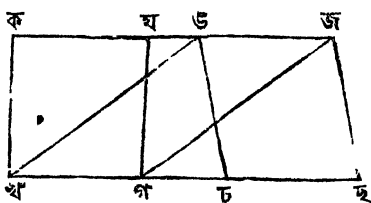
Join BE, CH; and because BC is equal to FG, and FG to (34. 1.) EH, BC is equal to EH; and they are parallels, and joined towards the same parts by the straight lines BE, CH: But *straight lines which join equal and parallel straight lines towards the same parts, are themselves equal and parallel* (33. 1.); therefore EB, CH are both equal and parallel, and EBCH is a parallelogram; and it is equal (35. 1.) to ABCD, because it is upon the same base BC, and between the same parallels BC, AH. For the like reason, the parallelogram EFGH is equal

হইতে চঘগ ও ঙকখ ত্রিভুজ একে২ লইলে অবশিষ্ট সমান হইবে (৩ স্ব. সা.), সুতরাং কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঙখগচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান। অতএব যে২ সমানান্তরাল ক্ষেত্র, ইত্যাদি।

সং. উ.। ১ প্রকরণ। ▭ কখগঘ = ২△ঘখগ (৩৪ প্র.) ঘখগচ = ২△ঘখগ (৩৪ প্র.) ∴ কখগঘ = ঘখগচ (৬ স্ব. সা.)।

২ প্রকরণ। কঘ = খগ। ঙচ = খগ (৩৪ প্র.), ∴ কঘ = ঙচ ∴ কঘ + ঘঙ = ঙচ + ঘঙ, অর্থাৎ কঙ = ঘচ। কখ = ঘগ (৩৪ প্র.), ∠ঙকখ = ∠চঘগ (২৯ প্র.), ∴ △ ঙকখ = △ চঘগ (৪ প্র.), ∴ কখগচ — △ ঙকখ = কখগচ — △ চঘগ, অর্থাৎ ▭ কখগঘ = ▭ ঙখগচ।

৩৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে২ সমানান্তরাল ক্ষেত্র সমান২ ভূমির উপর এবং একি সমানান্তরালের মধ্যে থাকে তাহারা পরস্পর সমান।

কখগঘ ও ঙ দুই সমানান্তরাল ক্ষেত্র খগ চছ সমান২ ভূমির উপর এবং কজ খছ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে।

কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঙচছজ সহিত সমান।

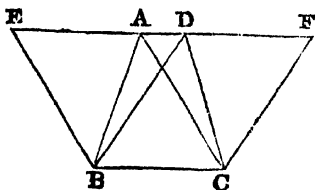
খঙ গজ রেখা টান। খগ, চছ সমান, ও চছ, ঙজ সমান (৩৪ প্র.), অতএব (১ স্ব. সা.) খগ, ঙজ সমান, এবং ইহারা সমানান্তরাল ও একে২ দিকে খঙ, গজ দ্বারা সংযুক্ত হইয়াছে। অপর তুল্য ও সমানান্তরাল সরল রেখা যে২ সরল রেখা দ্বারা একে২ দিকে সংযুক্ত হয় তাহারাও তুল্য এবং সমানান্তরাল, সুতরাং খঙ ও গজ তুল্য ও সমানান্তরাল, এবং ঙখগজ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, আর ঐই ক্ষেত্র কখগঘ সহিত খগ এক ভূমির উপর ও একি সমানান্তরাল কজ ও খগ মধ্যে থাকাতে

to the same EBCH: Therefore also, the parallelogram ABCD is equal to EFGH. Wherefore, *parallelograms, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. BC = FG; (Hyp.) FG = EH (34 of 1.) ∴ BC = EH ∴ BE ∥ CH ∴ EBCH is a ▭ = ABCD (35. of 1.) And EFGH = EBCH ∴ ABCD = EFGH.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangles upon the same base, and between the same parallels, are equal to one another.

Let the triangles ABC, DBC be upon the same base BC, and between the same parallels, AD BC: The triangle ABC is equal to the triangle DBC.

Produce AD both ways to the points E, F, and through B draw (31. 1.) BE parallel to CA; and through C draw CF parallel to BD: Therefore, each of the figures EBCA, DBCF is a parallelogram: and EBCA is equal (35. 1.) to DBCF, because they are upon the same base BC, and between the same parallels BC, EF; but the triangle ABC is the half of the parallelogram EBCA, because the diagonal AB bisects (34. 1.) it; and the triangle DBC is the half of the parallelogram DBCF, because the diagonal DC bisects it; And the halves of equal things are equal (7. Ax.): therefore the triangle ABC is equal to the triangle DBC. Wherefore, *triangles, &c.* Q. E. D.

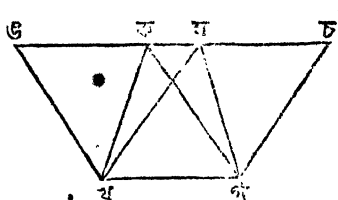
Sym. dem. ▭EBCA = ▭DBCF (35. of 1.) △ABC = ½EBCA (34. of 1.) △DBC = ½ DBCF ∴ △ABC = △DBC (7. Ax.)

তাহার সহিত সমান (৩৫ প্র.)। ঐ কারণে ঙচছজ ঙখগজ সহিত সমান। অতএব কখগঘ, ঙচছজ সমান (১ স্ব. সা.)। এই নিমিত্তে যেই সমানান্তরাল ক্ষেত্র, ইত্যাদি।

সং. উ.। খগ = চছ (কল্পনা) চছ = ঙজ (৩৪ প্র.) ∴ খগ = ঙজ ∴ খঙ ‖ গজ, ∴ ঙখগজ এক ▭ = কখগঘ (৩৫ প্র.)। ঙচছজ = ঙখগজ ∴ কখগঘ = ঙচছজ।

৩৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে২ ত্রিভুজ এক ভূমির উপর এবং একি সমানান্তরালের মধ্যে থাকে তাহারা পরস্পর সমান।

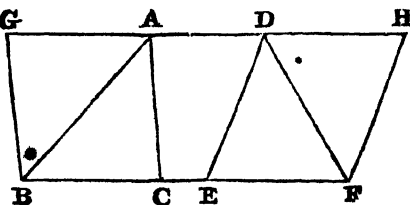
কখগ, ঘখগ দুই ত্রিভুজ খগ এক ভূমির এবং কঘ, খগ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান হইবে।

কঘ সরল রেখা উভয় পার্শ্বে ঙ ও চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং খ দিয়া খঙ, গক সমানান্তরাল করিয়া টান এবং গ দিয়া গচ, খঘ সমানান্তরাল করিয়া টান (৩১ প্র.), সুতরাং ঙখগক ও ঘখগচ প্রত্যেকে সমানান্তরাল ক্ষেত্র। ঙখগক ও ঘখগচ এক ভূমি খগ উপর এবং ঙচ ও খগ সাধারণ সমানান্তরাল রেখার মধ্যস্থ হওয়াতে পরস্পর সমান (৩৫ প্র.)। অপর কখগ ত্রিভুজ ঙখগক সমানান্তরাল ক্ষেত্রের অর্দ্ধ, কেননা কখ কর্ণ তাহাকে দ্বিখণ্ড করিতেছে (৩৪ প্র.), এবং ঘখগ ত্রিভুজ ঘখগচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের অর্দ্ধ, কেননা ঘগ তাহাকে দ্বিখণ্ড করিতেছে, অতএব (৭ স্ব. সা.) সমান২ বস্তুর অর্দ্ধও সমান হওয়াতে কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান। অতএব যে২ ত্রিভুজ, ইত্যাদি।

সং উ। ▭ ঙখগক = ▭ ঘখগচ (৩৫ প্র.), △ কখগ = ½ ঙখগক (৩৪ প্র.), △ ঘখগ = ½ ঘখগচ ∴ △ কখগ = △ ঘখগ (৭ স্ব. সা.)

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangles upon equal bases, and between the same parallels, are equal to one another.

Let the triangles ABC, DEF be upon equal bases BC, EF, and between the same parallels BF, AD: The triangle ABC is equal to the triangle DEF.

Produce AD both ways to the points G, H, and through B draw BG parallel (31. 1.) to CA, and though F, draw FH parallel to ED: Then each of the figures GBCA, DEFH is a parallelogram; and they are equal to (36. 1.) one another; because they

are upon equal bases BC, EF, and between the same parallels BF, GH; and the triangle ABC is the half (34. 1.) of the parallelogram GBCA, because the diagonal AB bisects it; and the triangle DEF is the half (34. 1.) of the parallelogram DEFH, because the diagonal DF bisects it: But the halves of equal things are equal (7. Ax.); therefore the triangle ABC is equal to the triangle DEF. Wherefore, *triangles &c.* Q. E. D.

Sym. dem. GBCA = DEFH (36. of 1.) $\triangle$ABC = $\frac{1}{2}$ GBCA (34. of 1.) $\triangle$DEF = $\frac{1}{2}$ DEFH $\therefore$ $\triangle$ABC = $\triangle$DEF (7. Ax.)

PROP. XXXIX. THEOR.

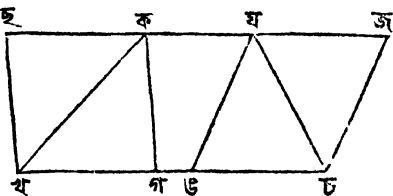
Equal triangles upon the same base, and upon the same side of it, are between the same parallels.

Let the equal triangles ABC, DBC be upon the same base BC, and upon the same side of it, they are between the same parallels.

Join AD; AD is parallel to BC; for, if it be not, through the point A draw (31. 1.) AE parallel to BC,

৩৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে২ ত্রিভুজ সমান২ ভূমির উপর এবং একি সমানান্তরালের মধ্যে থাকে তাহারা পরস্পর সমান।

কখগ ও ঘঙচ দুই ত্রিভুজ খগ ও ঙচ সমান২ ভূমির উপর এবং খচ ও কঘ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ সহিত সমান হইবে।

কঘ দুই দিকে ছ ও জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং খ দিয়া খছ, গক রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান, এবং চ দিয়া চজ, ঙঘ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান, তাহাতে ছখগক ও ঘঙচজ প্রত্যেকে সমানান্তরাল ক্ষেত্র হইবে, এবং ইহারা খগ ও ঙচ সমান২ ভূমির উপর এবং খচ ও ছজ একি সমানান্তরালের মধ্যে থাকাতে (৩৬ প্র.) পরস্পর সমান। অপর কখগ ত্রিভুজ ছখগক সমানান্তরাল ক্ষেত্রের অর্দ্ধ, কেননা (৩৪ প্র.) কখ কর্ণ তাহাকে দ্বিখণ্ড করে, এবং ঘঙচ ত্রিভুজ ঘঙচজ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের অর্দ্ধ, কেননা ঘচ কর্ণ তাহাকে দ্বিখণ্ড করে সুতরাং সমান২ বস্তুর অর্দ্ধও সমান হওয়াতে (৭ স্ব. সা.) কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ সমান। অতএব যে২ ত্রিভুজ, ইত্যাদি।

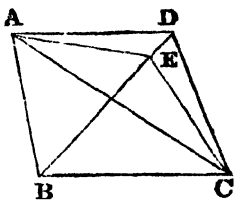
সং উ। 'ছখগক = ঘঙচজ (৩৬ প্র.), $\triangle$ কখগ = $\frac{1}{2}$ ছখগক (৩৪ প্র.), $\triangle$ ঘঙচ = $\frac{1}{2}$ ঘঙচজ, $\therefore$ $\triangle$ কখগ = $\triangle$ ঘঙচ (৭ স্ব. সা.)

৩৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান২ ত্রিভুজ এক ভূমির উপর এক পার্শ্বে থাকিলে একি সমানান্তরালের মধ্যে হইবে।

কখগ ও ঘখগ সমান২ ত্রিভুজ খগ এক ভূমির উপর এক পার্শ্বে আছে ইহারা একি সমানান্তরালের মধ্যে হইবে।

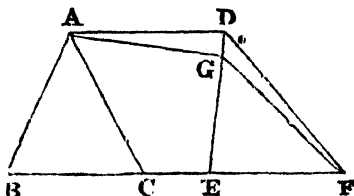
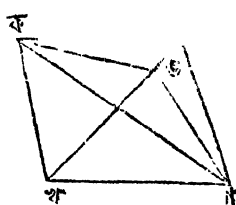
ক ঘ সংযুক্ত কর, কঘ খগ সমানান্তরাল হইবে, কেননা যদি

and join EC: The triangle ABC is equal (37. 1.) to the triangle EBC, because it is upon the same base BC, and between the same parallels BC, AE: But the triangle ABC is equal to the triangle BDC; therefore also the triangle BDC is equal to the triangle EBC; the greater to the less, which is impossible: Therefore AE is not parallel to BC. In the same manner, it may be demonstrated that no other line than AD is parallel to BC; AD is therefore parallel to it. Wherefore, *equal triangles upon &c.* Q. E. D.

Sym. dem. If AD ∦ BC draw AE ∥ BC. Then △ABC = △EBC (37. of 1.) △ABC = △DBC (Hyp.) ∴ △EBC = △DBC which is impossible (9. Ax.) ∴ AD ∥ BC

PROP. XL. THEOR.

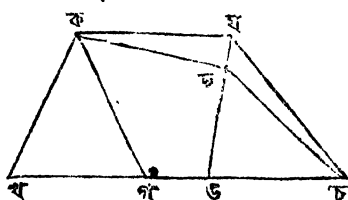
Equal triangles on the same side of bases, which are equal and in the same straight line, are between the same parallels.

Let the equal triangles ABC, DEF be upon equal bases BC, EF, in the same straight line BF, and towards the same parts; they are between the same parallels.

Join AD; AD is parallel to BC: For, if it be not, through A draw (31. 1.) AG parallel to BF, and join GF. The triangle ABC is equal (38. 1.) to the triangle GEF, because they are upon equal bases BC, EF, and between the same parallels BF, AG: But the triangle ABC is equal to the triangle DEF; therefore also, the triangle DEF is equal

না হয় তবে (৩১ প্র.) ক বিন্দু দিয়া কঙ খগ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান এবং ঙ গ সংযুক্ত কর, কখগ ত্রিভুজ ঙখগ ত্রিভুজের সমান (৩৭ প্র.) কেননা ইহারা খগ এক ভূমির উপর এবং খগ কঙ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। অপর কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান (কল্পনা), অতএব ঘখগ ত্রিভুজও ঙখগ সহিত সমান, কিন্তু বৃহত্তর লঘুতরের সমান হইতে পারেনা, অতএব কঙ খগ সমানান্তরাল নহে। এই রূপে ইহাও উপপন্ন হইতে পারে যে কঘ ভিন্ন অন্য কোন রেখা খগ রেখার সমানান্তরাল নহে সুতরাং কঘ খগ সমানান্তরাল। অতএব সমান২ ত্রিভুজ, ইত্যাদি

সং উ। যদি কঘ ∦ খগ তবে কঙ ‖ খগ কর। ∴ △ কখগ = △ ঙখগ (৩৭ প্র.), △ কখগ = △ ঘখগ (কল্পনা) ∴ △ ঙখগ = △ ঘখগ ইহা অসাধ্য (৯ স্ব. সা.)। ∴ কঘ ‖ খগ।

৪০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান২ ত্রিভুজ এক রেখাস্থ সমান২ ভূমির উপর এক পার্শ্বে থাকিলে একি সমানান্তরালের মধ্যে হইবে।

কখগ ও ঘঙচ দুই সমান২ ত্রিভুজ খচ এক রেখাস্থ খগ ও ঙচ সমান২ ভূমির উপর এক পার্শ্বে আছে। ইহারা একি সমানান্তরালের মধ্যে হইবে।

ক ঘ সংযুক্ত কর, কঘ খচ রেখার সমানান্তরাল হইবে। কেননা যদি না হয় তবে (৩১ প্র.) ক বিন্দু দিয়া কছ খচ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান এবং চ ছ সংযুক্ত কর। কখগ ত্রিভুজ ছঙচ ত্রিভুজের সমান (৩৮ প্র.) কেননা ইহারা

to the triangle GEF, the greater to the less, which is impossible: Therefore AG is not parallel to BF: And in the same manner, it may be demonstrated, that there is no other parallel to it than AD; AD is therefore parallel to BF. Wherefore, *equal triangles, &c.* Q. E. D.

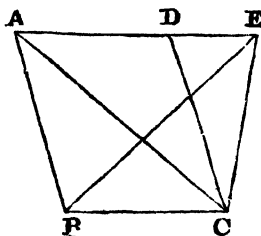
Sym dem. If AD ∦ BF draw AG ∥ BF. Then △ABC = △GEF (38. of 1.) △ABC = △DEF (Hyp.) ∴ △GEF = △DEF which is impossible (9. Ax.) ∴ AD ∥ BF.

PROP. XLI. THEOR.

If a parallelogram and a triangle are upon the same base, and between the same parallels; the parallelogram is double of the triangle.

Let the parallelogram ABCD and the triangle EBC be upon the same base BC, and between the same parallels BC, AE: the parallelogram ABCD is double of the triangle EBC.

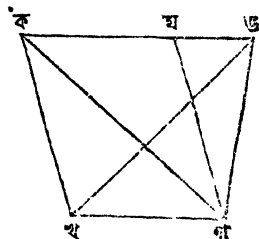
Join AC; then the triangle ABC is equal (37. 1.) to the triangle EBC, because they are upon the same base BC, and between the same parallels BC, AE. But the parallelogram ABCD is double (34. 1.) of the triangle ABC, because the diagonal AC divides it into two equal parts; wherefore ABCD is also double of the triangle EBC. Therefore, *if a parallelogram, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. △ABC = EBC (37. of 1.) ▭ABCD = 2 △ABC (34. of 1.) = 2 △EBC.

খগ ঙচ সমান২ ভূমির উপর এবং খচ কছ একি সমানান্ত-রালের মধ্যে আছে। অপর কখগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান অতএব ঘঙচ ত্রিভুজও ছঙচ সহিত সমান, কিন্তু বৃহত্তর লঘুতরের সমান হইতে পারে না অতএব কছ খচ সমানান্তরাল নহে। এই রূপে ইহাও উপপন্ন হইতে পারে যে কঘ ভিন্ন অন্য কোন রেখা খচ রেখার সমানান্তরাল নহে, সুতরাং কঘ খচ সমানান্তরাল। অতএব সমান২ ত্রিভুজ, ইত্যাদি।

সং উ.। যদি কঘ ∦ খচ তবে কছ ‖ খচ কর। ∴ △ কখগ = △ ছঙচ (৩৮ প্র.), △ কখগ = △ ঘঙচ (কল্পনা) ∴ △ ছঙচ = △ ঘঙচ। ইহা অসাধ্য (৯ স্ব. সা.) ∴ কঘ ‖ খচ।

৪১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র এবং এক ত্রিভুজ এক ভূমির উপর ও একি সমানান্তরালের মধ্যে থাকিলে ঐ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে।

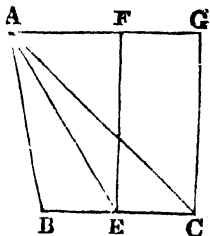
কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র এবং ঙখগ ত্রিভুজ খগ এক ভূমির উপর ও কঙ খগ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঙখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে।

উ.। ক গ সংযুক্ত কর, তাহাতে কখগ ত্রিভুজ ঙখগ ত্রিভুজের সমান হইবে (৩৭ প্র.), কেননা তাহারা খগ এক ভূমির উপর ও কঙ খগ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। অপর কখগঘ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ (৩৪ প্র.), কেননা কগ কর্ণ তাহাকে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করে, সুতরাং কখগঘ ঙখগ ত্রিভুজেরও দ্বিগুণ। অতএব এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, ইত্যাদি।

সং উ.। △ কখগ = △ ঙখগ (৩৭ প্র.), ▭ কখগঘ = ২ △ কখগ (৩৪ প্র.) = ২ △ ঙখগ।

PROP. XLII. PROB.

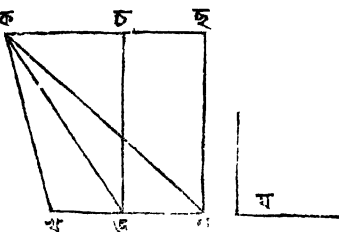
To describe a parallelogram that shall be equal to a given triangle, and have one of its angles equal to a given rectilineal angle.

Let ABC be the given triangle, and D the given rectilineal angle. It is required to describe a parallelogram that shall be equal to the given triangle ABC, and have one of its angles equal to D.

Bisect (10. 1.) BC in E, join AE, and at the point E in the straight line EC make (23. 1.) the angle CEF equal to D; and through A draw (31. 1.) AG parallel to BC, and through C draw CG (31. 1.) parallel to EF: Therefore FECG is a parallelogram: And because BE is equal to EC, the triangle ABE is likewise equal (38. 1.) to the triangle AEC, since they are upon equal bases BE, EC, and between the same parallels BC, AG; therefore, the triangle ABC is double the triangle AEC. And the parallelogram FECG is likewise double (41. 1.) of the triangle AEC, because it is upon the same base, and between the same parallels: Therefore the parallelogram FECG is equal to the triangle ABC, and it has one of its angles CEF equal to the given angle D: Wherefore, a parallelogram FECG has been described, equal to a given triangle ABC, and having one of its angles CEF equal to the given angle D. Which was to be done.

Sym. dem. BE = EC (by constr.) AG ∥ BC ∴ $\triangle$ABE = $\triangle$AEC (38. of 1.) ∴ $\triangle$ABC = 2 $\triangle$AEC; ▭FECG = 2 $\triangle$AEC (41. of 1.) = $\triangle$ABC.

৪২ প্রতিজ্ঞা— সম্পাদ্য।

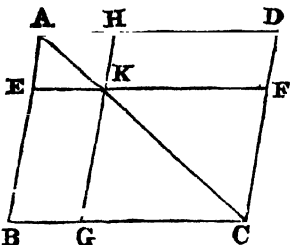
কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র আঁকিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট কোণ। কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট সমানান্তরাল ক্ষেত্র আঁকিতে হইবে।

খগ ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (১০ প্র.), এবং ঙগ রেখার ঙ বিন্দুতে ঘ সমান চঙগ কোণ (২৩ প্র.) অঙ্কিত কর, এবং ক দিয়া কছ, খগ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান এবং গ দিয়া গছ, চঙ রেখার সমানান্তরাল টান (৩১ প্র.)। অতএব চঙগছ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র। খঙ ঙগ পরস্পর সমান হওয়াতে কখঙ ত্রিভুজ কঙগ ত্রিভুজের সমান (৩৪ প্র.), কেননা ইহারা খঙ ঙগ সমান২ ভূমির উপর ও খগ কছ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে, সুতরাং কখগ ত্রিভুজ কঙগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ, এবং চঙগছ সমানান্তরাল ক্ষেত্রও কঙগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ (৪১ প্র.), কেননা ইহারা ঙগ এক ভূমির উপর ও কছ ঙগ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। অতএব চঙগছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের সমান এবং ইহার গঙচ কোণ ঘ নির্দ্দিষ্ট কোণ সমান। সুতরাং কখগ নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট কোণের সমান চঙগ এক কোণ বিশিষ্ট চঙগছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে।

সং. উ.। খঙ = ঙগ (অঙ্কপাত) কছ ‖ খগ ∴ △কখঙ = △কঙগ (৩৮ প্র.) ∴ △কখগ = ২△কঙগ। ▭ চঙগছ = ২△কঙগ (৪১ প্র.) = △কখগ।

PROP. XLIII. THEOR.

The complements of the parallelograms which are about the diagonal of any parallelogram, are equal to one another.

Let ABCD be a parallelogram, of which the diagonal is AC; let EH, FG be the parallelograms about AC, that is, through which AC passes, and let BK, KD be the other parallelograms, which make up the whole figure ABCD, and are therefore called the complements: The complement BK is equal to the complement KD.

Because ABCD is a parallelogram, and AC its diagonal, the triangle ABC is equal (34. 1.) to the triangle ADC: And, because EKHA is a parallelogram and AK its diagonal, the triangle AEK is equal to the triangle AHK: For the same reason, the triangle KGC is equal to the triangle KFC. Then, because the triangle AEK is equal to the triangle AHK, and the triangle KGC to the triangle KFC; the triangle AEK, together with the triangle, KGC, is equal to the triangle AHK, together with the triangle KFC: But the whole triangle ABC is equal to the whole ADC, therefore the remaining complement BK is equal to the remaining complement KD. Wherefore, *the complements*, &c. Q. E. D.

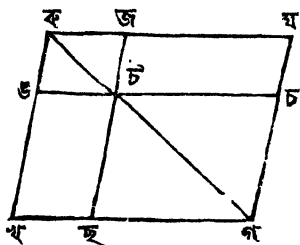
Sym. dem. $\triangle ABC = \triangle ADC$ (34. of 1.) $\triangle AEK = \triangle AHK$; $\triangle KGC = \triangle KFC$ $\therefore$ $\triangle ABC-(\triangle AEK + \triangle KGC) = \triangle ADC-(\triangle AHK + \triangle KFC)$ i. e. $\square BK = \square KD$.

PROP. XLIV. PROB.

To a given straight line to apply a parallelogram, which shall be equal to a given triangle, and have one of its angles equal to a given rectilineal angle.

৪৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

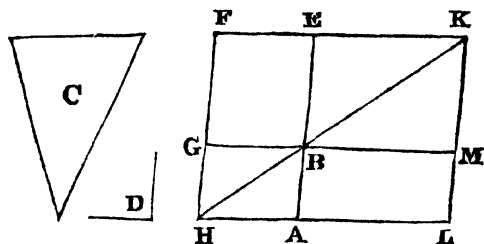
কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের কর্ণের পরিতস্থ যে২ সমানান্তরাল ক্ষেত্র, তাহাদের অবশিষ্ট পরস্পর সমান।

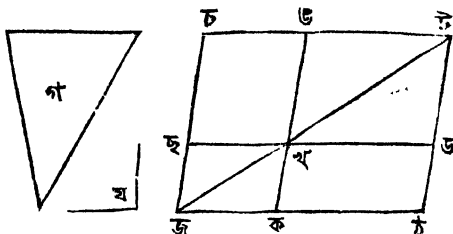
কখগঘ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, তাহার কর্ণ কগ। কগ পরিতস্থ (অর্থাৎ যাহাদের মধ্য দিয়া কগ চলিতেছে এমত) সমানান্তরাল ক্ষেত্র ঙজ ও চছ। খট ও টঘ অন্যান্য সমানান্তরাল ক্ষেত্র ইহাদের যোগে সমুদয় ক্ষেত্র কখগঘ পূর্ণ হইতেছে, এই নিমিত্তে ইহাদিগকে অবশিষ্ট কহা যায়। অবশিষ্ট খট অবশিষ্ট টঘ সমান হইবে।

কখগঘ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, কগ ইহার কর্ণ, অতএব (৩৪ প্র.) কখগ ত্রিভুজ কঘগ ত্রিভুজের সমান। এবং ঙটজক এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, কট তাহার কর্ণ, অতএব কঙট ত্রিভুজ কজট ত্রিভুজের সমান। এই রূপে টছগ ত্রিভুজ টচগ ত্রিভুজের সমান। অপর কঙট ত্রিভুজ কজট ত্রিভুজের সমান এবং টছগ ত্রিভুজ টচগ ত্রিভুজের সমান হওয়াতে কঙট ও টছগ দুই ত্রিভুজের যোগে কজট ও টচগ দুই ত্রিভুজের যোগ তুল্য, এবং সমুদয় ত্রিভুজ কখগ সমুদয় কঘগ সমান, সুতরাং অবশিষ্ট খট অবশিষ্ট টঘ সমান হইবে। অতএব কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের, ইত্যাদি।

সং. উ.। △ কখগ = △কঘগ (৩৪ প্র.) △ কঙট = △কজট। △ টছগ = △ টচগ ∴ △ কখগ — (△ কঙট + △ টছগ) = △কঘগ — (△কজট + △টচগ), অর্থাৎ ▭ খট = ▭ টঘ।

৪৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট এক সমানান্তরাল ক্ষেত্রকে এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাতে সংলগ্ন করিতে হইবে।

Let AB be the given straight line, and C the given triangle, and D the given rectilineal angle. It is required to apply to the straight line AB a parallelogram equal to the triangle C, and having an angle equal to D. Make (42. 1.) the parallelogram BEFG equal to

the triangle C, having the angle EBG equal to the angle D, and the side BE in the same straight line with AB: produce FG to H, and through A draw (31. 1.) AH parallel to BG, or EF, and join HB. Then, because the straight line HF falls upon the parallels AH, EF, the angles AHF, HFE, are together equal (29. 1.) to two right angles; wherefore, the angles BHF, HFE are less than two right angles: But straight lines which with another straight line make the interior angles, upon the same side, less than two right angles, do meet if produced (cor. 29. 1.): Therefore HB, FE will meet, if produced; let them meet in K, and through K draw KL parallel to EA or FH, and produce HA, GB to the points L, M: Then HLKF is a parallelogram, of which the diagonal is HK, and AG, ME are the parallelograms about HK; and LB, BF are the complements; therefore LB is equal (34. 1.) to BF: But BF is equal to the triangle C: wherefore LB is equal to the triangle C; and because the angle GBE is equal (15. 1.) to the angle ABM, and likewise to the angle D: the angle ABM is equal to the angle D: Therefore, the parallelogram LB, which is applied to the straight line

কখ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, গ এক নির্দ্দিষ্ট ত্রিভুজ, এবং ঘ এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ। গ ত্রিভুজের সমান এবং ঘ কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখ সরল রেখাতে সংলগ্ন করিতে হইবে।

গ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান ঙখছ এক কোণ বিশিষ্ট খঙচছ সমানান্তরাল ক্ষেত্র অঙ্কিত কর (৪২ প্র.), তাহার খঙ বাহু যেন কখ সহিত এক রেখাতে থাকে। পরে চছ জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং ক দিয়া কজ, ছখ অথবা চঙ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান এবং জ খ সংযুক্ত কর। অপর কজ চঙ সমানান্তরালের উপর জচ রেখার পাতে কজচ জচঙ একত্র দুই সমকোণ তুল্য হইতেছে (২৯ প্র.), সুতরাং খজচ ও জচঙ এই দুই কোণ একত্র দুই সমকোণের ন্যূন হইতেছে, এবং যে২ সরল রেখা অন্য সরল রেখার সম্পাতে এক পার্শ্বের দুই অন্তরস্থ কোণকে দুই সম কোণের ন্যূন করে তাহারা বৃদ্ধি পাইলে মিলিবে (২৯ প্র. অনু.) অতএব ইহারা যেন ট বিন্দুতে মিলিতেছে। অপর ট দিয়া টঠ, ঙক কিম্বা চজ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান এবং জক ও ছখ ক্রমশ ঠ ও ড পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। সুতরাং জঠটচ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, ইহার কর্ণ জট, এবং কছ ডঙ জট পরিতস্থ সমানান্তরাল ক্ষেত্র, আর ঠখ ও খচ দুই অবশিষ্ট অতএব ঠখ খচ সমান (৪৩ প্র.)। খচ গ ত্রিভুজ সমান, সুতরাং ঠখ গ ত্রিভুজ সমান। অপর ছখঙ কোণ (১৫ প্র.) কখড ও ঘ কোণের প্রত্যেকের সমান সুতরাং কখড ঘ কোণের সমান। অতএব ঠখ সমানান্তরাল ক্ষেত্র গ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান কখড এক কোণ বিশিষ্ট হইয়া কখ রেখায় সংলগ্ন হইয়াছে, ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

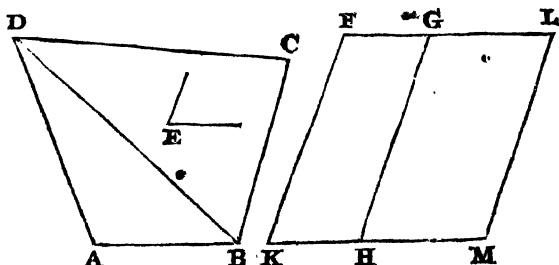
AB, is equal to the triangle C, and has the angle ABM equal to the angle D. Which was to be done.

Sym. dem. ▭BF = △C (by constr.) ▭LB = BF (43. of 1.) = △C (1. Ax.) ∠ABM = ∠EBG (15. of 1.) = ∠D.

PROP. XLV. PROB.

To describe a parallelogram equal to a given rectilineal figure, and having an angle equal to a given rectilineal angle.

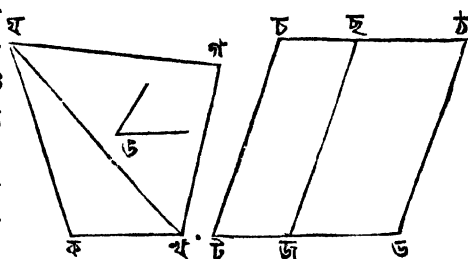
Let ABCD be the given rectilineal figure, and E the given rectilineal angle: it is required to describe a parallelogram equal to ABCD, and having an angle equal to E.

Join DB, and describe (42. 1.) the parallelogram FH equal to the triangle ADB, and having the angle HKF equal to the angle E; and to the straight line GH (44. 1.) apply the parallelogram GM equal to the triangle DBC, having the angle GHM equal to the angle E. And because the angle E is equal to each of the angles FKH, GHM, the angle FKH is equal to GHM: add to each of these the angle KHG; therefore the angles FKH, KHG are equal to the angles KHG, GHM; but FKH, KHG are equal (29. 1.) to two right angles; therefore also KHG, GHM are

equal to two right angles: and because at the point H in the straight line GH, the two straight lines KH, HM, upon the opposite sides of GH, make the adja-

সং. উ.। ▭ খচ = △ গ (অঙ্কপাত)। ▭ ঠখ = ▭ খচ (৪৩ প্র.) = △ গ (১ স্ব. সা.)। ∠কখড = ∠ঙখছ (১৫ প্র.) = ∠ঘ।

৪৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের তুল্য এবং নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগঘ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র, ও নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ। কখগঘ সমান এবং ঙ সমান এক কোণ বিশিষ্ট এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঘ খ সংযুক্ত কর। কঘখ ত্রিভুজ সমান এবং ঙ সমান জটচ কোণ বিশিষ্ট চজ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র অঙ্কিত কর (৪২ প্র.), এবং খঘগ ত্রিভুজ সমান ও ঙ সমান ডজছ কোণ বিশিষ্ট ছড সমানান্তরাল ক্ষেত্র ছজ সরল রেখাতে সংলগ্ন কর (৪৪ প্র.)। চটজ ও ছজড প্রত্যেকে ঙ কোণ সমান হওয়াতে চটজ কোণ ও ছজড কোণ পরস্পর সমান। উভয় পক্ষে টজছ কোণ যোগ কর তাহাতে চটজ ও টজছ এই দুই কোণ একত্র টজছ ও ছজড সমান। চটজ ও টজছ দুই সমকোণ তুল্য (২৯ প্র.), সুতরাং টজছ ও ছজড দুই সমকোণ তুল্য। ছজ সরল রেখার জ বিন্দুতে টজ ও জড ভিন্ন২ পার্শ্ব হইতে আসিয়া সমীপস্থ কোণ দ্বয়কে একত্র দুই সমকোণ তুল্য করিতেছে এই হেতুক টজ ও জড একি সরল রেখাতে আছে (১৪ প্র.)। এবং চছ ও টড সমানান্তরালের উপর ছজ

cent angles equal to two right angles, KH is in the same straight line (14. 1.) with HM. And because the straight line HG meets the parallels KM, FG, the alternate angles MHG, HGF are equal (29. 1.); add to each of these the angle HGL; therefore the angles MHG, HGL, are equal to the angles HGF, HGL: But the angles MHG, HGL, are equal (29. 1.) to two right angles; wherefore also the angles HGF, HGL are equal to two right angles, and FG is therefore in the same straight line (14. 1.) with GL. And because KF is parallel to HG, and HG, to ML., KF is parallel (30. 1.) to ML; but KM, FL are parallels; wherefore KFLM is a parallelogram. And because the triangle ABD is equal to the parallelogram HF, and the triangle DBC to the parallelogram GM, the whole rectilineal figure ABCD is equal to the whole parallelogram KFLM; therefore the parallelogram KFLM has been described equal to the given rectilineal figure ABCD, having the angle FKM equal to the given angle E. Which was to be done.

COR. From this it is manifest how, to a given straight line, to apply a parallelogram, which shall have an angle equal to a given rectilineal angle, and shall be equal to a given rectilineal figure, *viz.* by applying (44. 1.) to the given straight line a parallelogram equal to the first triangle ABD, and having an angle equal to the given angle.

Sym. dem. $\angle FKH = \angle E$; $\angle GHM = \angle E$ ∴ $\angle GHM = \angle FKH$ ∴ $\angle GHM + \angle GHK = \angle FKH + \angle GHK = 2$ Rt. $\angle$s (29. of 1.) ∴ KH is in the same straight line with HM (14. of 1.) And $\angle FGH = \angle GHM$ (29. of 1.) ∴ $\angle FGH + \angle HGL = \angle GHM + \angle HGL = 2$ Rt. $\angle$s (29. of 1.) ∴ FG is in the same straight line with LG. And ∵ KF ∥ HG and HG ∥ ML ∴ KF ∥ ML (30. of 1. ∴ FKML is a ▭ = FH + GM = DAB + DBC = DABC.

পাত হওয়াতে ছজড ও চছজ ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইতেছে, ইহাদের প্রত্যেকে জছঠ যোগ করিলে ছজড ও জছঠ দুই কোণ চছজ ও জছঠ দুই কোণের সমান হইবে, অপর ছজড ও জছঠ দুই সমকোণ তুল্য (২৯ প্র.) সুতরাং চছজ ও জছঠ দুই সমকোণ তুল্য এবং তন্নিমিত্তে চছ ছঠ একি সরল রেখা (১৪ প্র.)। আর টচ জছ সমানান্তরাল ও জছ ডঠ সমানান্তরাল অতএব টচ ডঠ সমানান্তরাল (৩০ প্র.), এবং টড চঠ ও সমানান্তরাল সুতরাং টচঠড সমানান্তরাল ক্ষেত্র। অপর কঘখ ত্রিভুজ জচ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান এবং খঘগ ত্রিভুজ ছড সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান সুতরাং সমুদয় সরল রৈখিক ক্ষেত্র কখগঘ সমুদয় চটডঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সমান। অতএব চটডঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখগঘ নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান ও ঙ সমান চটড এক কোণ বিশিষ্ট হইয়া অঙ্কিত হইয়াছে, ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

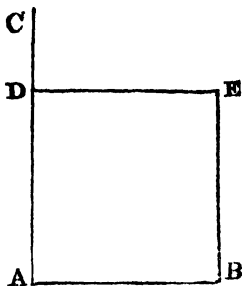
অনুমান। কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র কোন নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাতে কিরূপে সংলগ্ন করিতে হয় তাহা স্বতই বোধ গম্য, কেননা নির্দ্দিষ্ট রেখাতে প্রথম ত্রিভুজ কখঘ সমান ও নির্দ্দিষ্ট কোণ সমান এক কোণ বিশিষ্ট সমানান্তরাল ক্ষেত্র সংলগ্ন করিলেই তাহা সিদ্ধ হইবে।

সং. উ.। ∠চটজ = ∠ঙ। ∠ছজড = ∠ঙ ∴ ∠চটজ = ∠ছজড ∴ ∠ছজড + ∠ছজট = ∠চটজ + ∠ছজট = ২ সম ∠ (২৯ প্র.) ∴ টজ ও জড এক রেখা (১৪ প্র.)। অপর ∠চছজ = ∠ছজড (২৯ প্র.) ∴ ∠চছজ + ∠জছঠ = ∠ছজড + ∠জছঠ = ২ সম ∠ (২৯ প্র.) ∴ চছ ঠছ এক রেখা। এবং ∵ টচ ∥ জছ ও জছ ∥ ডঠ ∴ টচ ∥ ডঠ (৩০ প্র.) ∴ চটডঠ এক ▭ = চজ + ছড = ঘকখ + ঘখগ = কখগঘ।

PROP. XLVI. PROB.

To describe a square upon a given straight line.

Let AB be the given straight line; it is required to describe a square upon AB.

From the point A draw (11. 1.) AC at right angles to AB; and make (3. 1.) AD equal to AB, and through the point D draw DE parallel (31. 1.) to AB, and through B draw BE parallel to AD; therefore ADEB is a parallelogram: Whence AB is equal (34. 1.) to DE, and AD to BE; but BA is equal to AD; therefore the four straight lines BA, AD, DE, EB are equal to one another, and the parallelogram ADEB is equilateral: it is likewise rectangular; for the straight line AD meeting the parallels AB, DE, makes the angles BAD, ADE equal (29. 1.) to two right angles; but BAD is a right angle; therefore also ADE is a right angle; now the opposite angles of parallelograms are equal (34. 1.) therefore each of the opposite angles ABE, BED is a right angle; wherefore the figure ADEB is rectangular, and it has been demonstrated that it is equilateral; it is therefore a square, and it is described upon the given straight line AB: Which was to be done.

Cor. Hence *every parallelogram that has one right angle has all its angles right angles.*

Sym. dem. DE $=$ AB (34. of 1.) $=$ DA $=$ EB; $\angle$DAB $+$ $\angle$ABE $=$ 2 Rt. $\angle$s (29. of 1.) But $\angle$DAB is a Rt. $\angle$ $\therefore$ $\angle$ABE is a Rt. $\angle$; $\angle$ADE $=$ $\angle$ABE $=$ a Rt. $\angle$; $\angle$DEB $=$ $\angle$DAB $=$ a Rt. $\angle$ $\therefore$ DB is a $\square$.

৪৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর সমচতুর্ভুজ আঁকিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, ইহার উপর এক সমচতুর্ভুজ আঁকিতে হইবে।

ক হইতে কখ রেখার লম্বভাবে কগ টান (১১ প্র.) এবং কঘ কখ সমান কর, ও ঘ দিয়া ঘঙ,কখ রেখার সমানান্তরাল টান, এবং খ দিয়া খঙ, কঘ রেখার সমানান্তরাল টান, তাহাতে কঘঙখ সমানান্তরাল ক্ষেত্র হইবে,অতএব কখ ঘঙসমান ও কঘ খঙ সমান (৩৪ প্র.), অপর কখ কঘ সমান হওয়াতে কখ কঘ ঘঙ ঙখ চারি রেখা পরস্পর সমান, এবং তন্নিমিত্তে কঘঙখ সমানান্তরাল ক্ষেত্র সমবাহুক, আর তাহা সমকোণিও বটে কেননা কঘ রেখা কখ ঘঙ সমানান্তরালের উপর পড়িয়া খকঘ ও কঘঙ দুই কোণকে দুই সমকোণ তুল্য করিতেছে (২৯ প্র.), এবং খকঘ স্বয়ং এক সমকোণ হওয়াতে কঘঙও সমকোণ, অপর সমানান্তরাল ক্ষেত্রের সম্মুখস্থ কোণ পরস্পর সমান (৩৪ প্র.), সুতরাং কখঙ খঙঘ উহাদের সম্মুখস্থ কোণ দ্বয় প্রত্যেকে সমকোণ, তন্নিমিত্তে কঘঙখ সমকোণি ক্ষেত্র, আর ইহা যে সমবাহুক তাহা পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে অতএব ইহা সমচতুর্ভুজ, এবং কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত হইয়াছে। ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

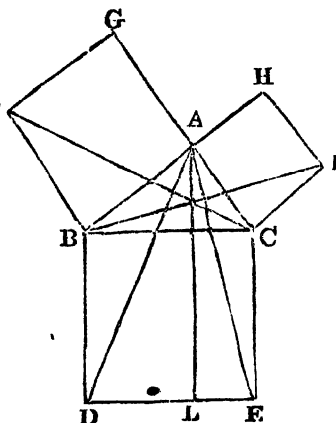
অনুমান। অতএব সমানান্তরাল ক্ষেত্রের মধ্যে এক সম কোণ থাকিলে সকলি সমকোণ হইবে।

সং. উ.। ঘঙ = কখ (৩৪ প্র.) = ঘক = ঙখ। ∠ঘকখ + ∠কঘঙ = ২ সম ∠ (২৯ প্র.)। ∠ঘকখ এক সম ∠, ∴ ∠কঘঙ = সম ∠। ∠কখঙ = ∠কঘঙ = সম ∠। ∠ঘঙখ = ∠ঘকখ = সম ∠, ∴ ঘখ এক □।

PROP. XLVII. THEOR.

In any right angled triangle, the square which is described upon the side subtending the right angle, is equal to the squares described upon the sides which contain the right angle.

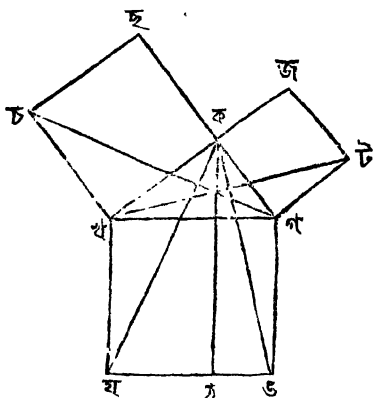
Let ABC be a right angled triangle having the right angle BAC; the square described upon the side BC is equal to the squares described upon BA, AC.

On BC describe (46. 1.) the square BDEC, and on BA, AC, the squares GB, HC; and through A draw (31. 1.) AL parallel to BD or CE, and join AD, FC; then, because each of the angles BAC, BAG is a right angle (25. Def.), the two straight lines AC, AG upon the opposite sides of AB, make with it at the point A the adjacent angles equal to two right angles; therefore CA is in the same straight line (14. 1.) with AG; for the same reason, AB, and AH are in the same straight line. Now because the angle DBC is equal to

the angle FBA, each of them being a right angle, adding to each the angle ABC, the whole angle DBA will be equal (2. Ax.) to the whole FBC; and because the two sides AB, BD, are equal to the two FB, BC, each to each, and the angle DBA, equal to the angle FBC. therefore the base AD is equal (4. 1.) to the base FC, and the triangle ABD to the triangle FBC. But the parallelogram BL is double (41. 1.) the triangle ABD, because they are upon the same base BD, and between the same parallels, BD, AL; and

৪৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমকোণি ত্রিভুজে সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ সমকোণের পার্শ্ব স্বরূপ দুই বাহুর উপরে অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের যোগ তুল্য।

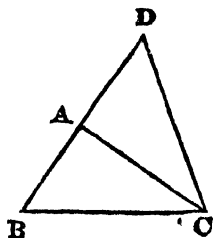
কখগ এক সমকোণি ত্রিভুজ তাহার মধ্যে খ-কগ সমকোণ। খগ উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খক কগ উভয়ের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের যোগ তুল্য। খগ রেখার উপর খঘঙগ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর (৪৬ প্র.) এবং খক কগ উপর ছখ জগ দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর। এবং ক দিয়া কঠ খঘ কিম্বা গঙ রেখার সমানান্তরাল টান এবং ক ঘ ও চ গ সংযুক্ত কর। খকগ ও খকছ প্রত্যেকে সমকোণ (২৫ সং), সুতরাং খক রেখার ক বিন্দুতে ছক গক ভিন্ন২ দিক হইতে আসিয়া সমীপস্থ কোণ দ্বয়কে একত্র দুই সমকোণ তুল্য করিতেছে অতএব (১৪ প্র.) গক কছ একি সরল রেখাতে আছে। ঐ কারণ কখ কজও এক সরল রেখাতে আছে। ঘখগ চখক প্রত্যেকে সমকোণ হইয়া পরস্পর সমান হওয়াতে কখগ উভয়তঃ যোগ করিলে সমুদয় কোণ ঘখক সমুদয় চখগ সহিত সমান হইবে। অপর কখ, খঘ দুই বাহু ক্রমশ চখ খগ সহিত সমান ও চখগ কোণ কখঘ কোণের সমান হও-য়াতে (৪ প্র.) কঘ ভূমি চগ ভূমির সমান ও কখঘ ত্রিভুজ চখগ ত্রিভুজের সমান হইতেছে। খঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্র কখঘ ত্রিভুজের দ্বিগুণ কেননা তাহারা খঘ এক ভূমির উপর ও খঘ কঠ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে (৪১ প্র.), এবং ছখ সম-

the square GB is double of the triangle BFC, because these also are upon the same base FB, and between the same parallels FB, GC. Now the doubles of equals are equal (6. Ax.) to one another; therefore the parallelogram BL is equal to the square GB: And, in the same manner, by joining AE, BK, it is demonstrated, that the parallelogram CL is equal to the square HC. Therefore the whole square BDEC is equal to the two squares GB, HC; and the square BDEC is described upon the straight line BC, and the squares GB, HC upon BA, AC: wherefore the square upon the side BC is equal to the squares upon the sides BA, AC Therefore, *in any right angled triangle &c.* Q. E. D.

Sym. dem. ∠BAC is a rt. angle; ∠BAG is a rt. angle (25. Def.) ∴ CA, GA are in the same straight line (14. of 1.); AB = FB; BD = BC; ∠CBD = ∠FBA (10. Ax.) ∴ ∠CBD + ∠ABC (or ∠ABD) = = ∠FBA + ∠ABC (or ∠FBC) ∴ (4. of 1.) △ABD = △FBC; △ABD = $\frac{1}{2}$ BL (41. of 1.); △FBC = $\frac{1}{2}$ BG ∴ BL = BG (6. Ax.) = AB^2. Similarly CL = CH = AC^2 ∴ BL + CL = BE = BC^2 = BG + CH = $AB^2 + AC^2$.

PROP. XLVIII. THEOR.

If the square described upon one of the sides of a triangle is equal to the squares described upon the other two sides of it; the angle contained by these two sides is a right angle.

If the square described upon BC, one of the sides of the triangle ABC, is equal to the squares upon the other sides BA, AC, the angle BAC is a right angle.

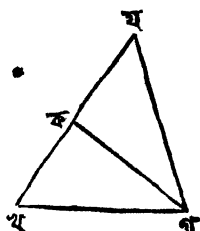
From the point A, draw (11. 1.) AD at right angles to AC, and make AD equal to BA, and join DC. Then, because DA, is

চতুর্ভুজ চখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ কেননা তাহারা চখ এক ভূমির উপর ও চখ ছগ একি সমানান্তরালের মধ্যে আছে। অপর সমান২ বস্তুর দ্বিগুণও সমান (৬ স্ব. সা) অতএব খঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্র ছখ সমচতুর্ভুজ তুল্য। ঐ রূপে ক ঙ ও খ ট সংযুক্ত করিয়া দেখা যাইতেছে যে গঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্র জগ সমচতুর্ভুজের সমান। অতএব খঘঙগ সমুদয় সমচতুর্ভুজ ছখ জগ দুই সমচতুর্ভুজের যোগ তুল্য, আর খঘঙগ সমচতুর্ভুজ খগ উপর অঙ্কিত ও ছখ জগ দুই সমচতুর্ভুজ খক ও কগ উপর অঙ্কিত সুতরাং খগ বাহুর উপরিস্থ সমচতুর্ভুজ খক কগ বাহুর উপরিস্থ দুই সমচতুর্ভুজের সমান। অতএব সমকোণি ত্রিভুজে, ইত্যাদি।

সং. উ.)। ∠খকগ এক সমকোণ; ∠খকছ এক সমকোণ (২৫ সং°) ∴ গক ছক একি রেখা (১৪ প্র.)। কখ = চখ। খঘ = খগ। ∠গখঘ = ∠চখক (১০ স্ব. সা.) ∴ ∠গখঘ + ∠কখগ (অর্থাৎ কখঘ) = ∠চখক + ∠কখগ (অর্থাৎ ∠চখগ) ∴ (৪ প্র.) △কখঘ = △চখগ। △কখঘ = ½খঠ (৪১ প্র.), △চখগ = ½খছ ∴ খঠ = খছ (৬ স্ব. সা.) = কখ²। তদ্রূপ গঠ = গজ = কগ² ∴ খঠ + গঠ = খঙ = খগ² = খছ + গজ = কখ² + কগ²।

৪৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যদি অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হয় তবে ঐ দুই বাহুর মধ্যবর্ত্তি কোণ সমকোণ হইবে।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যদি কখ কগ অন্যান্য বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয় তবে খকগ এক সমকোণ।

ক বিন্দু হইতে কগ উপর কঘ লম্ব ভাবে টান (১১ প্র.) এবং কঘ খক

equal to AB, the square of DA is equal to the square of BA : To each of these add the square of AC; therefore the squares of AD, AC, are equal to the squares of BA, AC. But the square of DC is equal (47. 1.) to the squares of DA, AC, because DAC is a right angle; and the square of BC, by hypothesis, is equal to the squares of BA, AC; therefore the square of DC is equal to the square of BC; and therefore also the side DC is equal to the side BC. And because the side DA is equal to AB, and AC common to the two triangles DAC, BAC, and the base DC likewise equal to the base BC, the angle DAC is equal (8. 1.) to the angle BAC: But DAC is a right angle; therefore also BAC is a right angle. Therefore, *if the square, &c.* Q. E. D.

Sym. dem. $DC^2 = AD^2 + AC^2$ (47. of 1.) $= AB^2 + AC^2 = BC^2 \therefore DC = BC$; $\because AB = AD$, AC common to $\triangle$s ABC, ADC, and $BC = DC \therefore$ (8. of 1.) $\angle BAC = \angle DAC =$ Rt. $\angle$.

সমান কর ও ঘ গ সংযুক্ত কর। পরে ঘক কখ সমান হও-য়াতে ঘক সমচতুর্ভুজ কখ সমচতুর্ভুজ সমান হইবে তাহাতে কগ সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে ঘক কগ এ দুএর সমচতুর্ভুজ কখ কগ রেখা দ্বয়ের সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে। কিন্তু গকঘ সমকোণ হওয়াতে গঘ সমচতুর্ভুজ গক কঘ উভয়ের সমচতুর্ভুজ তুল্য (৪৭ প্র.), আর কল্পনানুসারে খগ সমচতুর্ভুজ কখ কগ উভ-য়ের সমচতুর্ভুজের তুল্য, অতএব গঘ সমচতুর্ভুজ খগ সম-চতুর্ভুজের তুল্য সুতরাং গঘ খগ সমান। অপর ঘক কখ সমান ও কগ কঘগ ও কখগ উভয় ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং গঘ ভূমিও খগ সমান অতএব গকঘ কোণ খকগ সমান (৮ প্র.)। গকঘ এক সমকোণ সুতরাং খকগও এক সমকোণ। অতএব কোন ত্রিভুজের, ইত্যাদি।

সং. উ.। ঘগ^২ = কঘ^২ + কগ^২ (৪৭ প্র.) = কখ^২ + কগ^২ = খগ^২ ∴ ঘগ = খগ। ∵ কখ = কঘ, এবং কগ কখগ ও কঘগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, ও খগ = গঘ ∴ (৮ প্র.) ∠খকগ = ∠ঘকগ = সম ∠।

BOOK II*.

DEFINITIONS.

Every right angled parallelogram, or *rectangle*†, is said to be contained by any two of the straight lines which are about one of the right angles.

"Thus the right angled parallelogram AC is called "the rectangle contained by AD and DC, or by AD "and AB, &c. For the sake of brevity, instead of "the *rectangle contained* by AD and DC, we shall simply say the rectangle AD.DC, placing a point between the two sides of the rectangle. Also, instead "of the square of a line, for instance of AD, we shall "occasionally write AD^2."

In every parallelogram, any of the parallelograms about a diagonal, together with the two complements, is

---

* As the propositions in the 2d Book are almost all capable of being demonstrated *algebraically*, it has been deemed advisable to add *demonstrations by Algebra* to the geometrical ones taken from Dr. Playfair's text. The editor is aware of the objections which some eminent mathematicians have expressed to the introduction of Algebra into Euclid; but as no student can lose anything by the independent addition of such demonstrations, they are appended in the hope of their proving not altogether useless. The elementary rules of Algebra given in the *introduction*, will, it is hoped, enable the learner to understand these demonstrations; and as the relation between Geometry and Algebra will be more fully explained in a future treatise on *Algebra*, these demonstrations are now inserted by anticipation, in order that the present work may not be left incomplete.—*Ed. Encyclo. Beng.*

† "Rectangles in Geometry and products in arithmetic are frequently put for each other, and their names are applied promiscuously."—*Keith.* If a stand for AD, b for DC, the rectangle AD.DC is the same as ab; and if a be 4 inches and b 3, ab will be 12, which shall exactly be in such a case the number of square inches on the surface of the rectangle in question.

২ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১. প্রত্যেক সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র অর্থাৎ আয়তকে* কোন সমকোণের পার্শ্বস্থ দুই সরল রেখার অন্তর্গত কহা যায়।

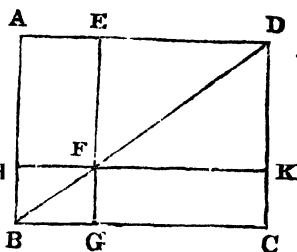
"যথা কগ সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্রকে কঘ ও ঘগ কিম্বা কঘ ও কখ রেখার অন্তর্গত আয়ত কহা যায়, ইত্যাদি। এ স্থলে কঘ ঘগ অন্তর্গত আয়ত না কহিয়া সংক্ষেপার্থে দুই পার্শ্ব বোধক অক্ষর মধ্যে এক বিন্দু দিয়া কেবল আয়ত কঘ.ঘগ কহা যাইবে। আর কোন রেখার (যথা কঘ) সমচতুর্ভুজ না কহিয়া কখন২ "কঘ^{২}" এমত কহা যাইবে"।

২. প্রত্যেক সমানান্তরাল ক্ষেত্রে কর্ণের পরিতস্থ কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্র দুই অবশিষ্ট সমেত শঙ্কু শব্দ বাচ্য হয়। "যথা জছ সমানান্তরাল ক্ষেত্রকে কচ চগ দুই

---

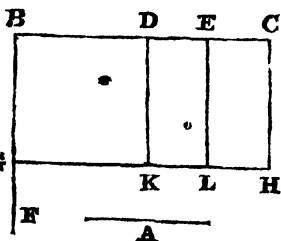
* "ক্ষেত্র তত্ত্বেতে যাহাকে আয়ত কহে এবং গণিত বিদ্যাতে যাহাকে গুণনের ফল কহে তাহাদিকে কখন২ পরস্পর স্বরূপ ভাবে বর্ণনা করা যায় এবং তাহাদের নামও অভেদ করিয়া লিখা যায়"। ইতি কিথ নামক গ্রন্থ কারকের উক্তি।

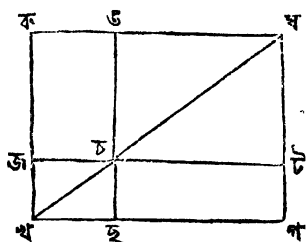
যদি কঘ রেখার নাম ক হয় এবং গঘ রেখার নাম খ হয় তবে কঘ.ঘগ আয়ত ও কখ বীজ গণিতের অঙ্ক উভয়ই এক হইবে, এবং ক অক্ষরের পরিমাণ যদি ৪ অঙ্গুলি ও খ অক্ষরের ৩ অঙ্গুলি হয় তবে গুণন দ্বারা কখ ১২ অঙ্গুলি হইবে, আর এমত হইলে উক্ত আয়তের ক্ষেত্র ফল ঠিক ১২ বর্গাত্মক অঙ্গুলি হইবে।

called a *Gnomon.* Thus, "the parallelogram HG "together with the com- "plements AF, FC, is "the gnomon of the par- "allelogram AC. This "gnomon may also, for "the sake of brevity, be "called the gnomon AGK "or EHC."

PROP. I. THEOR.

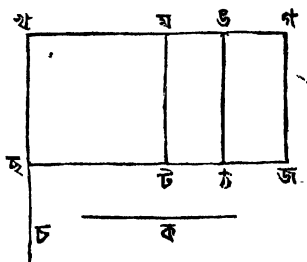
If there be two straight lines, one of which is divided into any number of parts ; the rectangle contained by the two straight lines is equal to the rectangles contained by the undivided line, and the several parts of the divided line.

Let A and BC be two straight lines; and let BC be divided into any parts in the points D, E ; the rectangle A.BC is equal to the several rectangles A.BD, A.DE, A.EC.

From the point B draw (11. 1.) BE at right angles to BC, and make BG equal (3.1.) to A; and through G draw (31. 1.) GH parallel to BC; and through D, E, C, draw (31. 1.) DK, EL, CH, parallel to BG; then BH, BK, DL, and EH are rectangles, and BH=BK+DL+EH.

But BH=BG.BC=A.BC, because BG=A: Also BK =BG.BD=A.BD, because BG=A; and DL= DK.DE=A.DE, because (34. 1.) DK=BG=A. In like manner, EH=A.EC. Therefore A.BC=A.BD+ A.DE, + A.EC; that is, the rectangle A.BC is

অবশিষ্টের সহিত একত্র কগ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের শঙ্কু কহা যায়। সংক্ষেপার্থে এই শঙ্কুকে কছট কিম্বা ঙজগ শঙ্কু কহা যাইতে পারে।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখার মধ্যে যদি একটী কএক অংশে বিভক্ত হয় তবে ঐ দুই সরল রেখার অন্তর্গত আয়ত অবিভক্ত রেখা এবং বিভক্ত রেখার ভিন্ন২ অংশের অন্তর্গত আয়ত সমূহের সমান।

ক এবং খগ দুই সরল রেখা। খগ ঘ, ঙ বিন্দুতে কএক অংশে বিভক্ত। ক. খগ আয়ত ক.খঘ, ক.ঘঙ, ক. ঙগ এই২ আয়তের সমান হইবে।

খ বিন্দু হইতে খচ, খগ রেখার লম্ব ভাবে টানিয়া (১ অ. ১১॰প্র.) খছ ক সমান কর (১। ৩), এবং ছ দিয়া ছজ, খগ সমানান্তরাল করিয়া টান, এবং ঘ, ঙ, গ, দিয়া ঘট, ঙঠ, গজ, খছ রেখার সমানান্তরাল টান তাহাতে খজ, খট, ঘঠ, ঙজ আয়ত হইবে। এবং খজ = খট + ঘঠ + ঙজ।

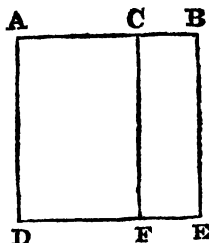
অপর খজ = খছ.খগ = ক.খগ, কেননা খছ = ক। এবং খট = খছ.খঘ = ক.খঘ কেননা খছ = ক। এবং ঘঠ = ঘট.ঘঙ = ক.ঘঙ, কেননা ঘট = খছ = ক। ঐ রূপে ঙজ = ক.ঙগ। অতএব ক.খগ = ক.খঘ + ক.ঘঙ + ক.ঙগ, অর্থাৎ ক.খগ আয়ত ক.খঘ, ক.ঘঙ, ক.ঙগ

equal to the several rectangles A.BD, A.DE, A.EC. Therefore, "*if there be two straight lines*," &c. Q. E. D.

Demonstration by Algebra.—Suppose s stands for the whole line BC, and a, b, c, for its parts BD, DE, EC severally, and m for the undivided line A. $s = a + b + c \therefore ms = m(a + b + c) = ma + mb + mc$.

PROP. II. THEOR.

If a straight line be divided into any two parts, the rectangles contained by the whole and each of the parts, are together equal to the square of the whole line.

Let the straight line AB be divided into any two parts in the point C; the rectangle AB.BC, together with the rectangle AB.AC, is equal to the square of AB; or $AB.AC + AB.BC = AB^2$.

On AB describe (46. 1.) the square ADEB, and through C draw CF (31. 1.) parallel to AD or BE; then AF + CE=AE. But AF=AD.AC=AB.AC, because AD=AB; CE=BE.BC=AB.BC; and $AE = AB^2$. Therefore, $AB.AC + AB.BC = AB^2$. Therefore, "*if a straight line*," &c. Q. E. D.

Dem. by Alg.—Suppose s stands for the whole line AB and a, b, for its two parts AC, CB. $a + b = s \therefore as + bs = s^2$.

PROP. III. THEOR.

If a straight line be divided into any two parts, the rectangle contained by the whole and one of the parts, is equal to the rectangle contained by the two parts, together with the square of the foresaid part.

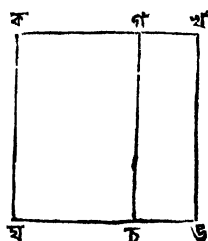
Let the straight line AB be divided into any two parts in the point C; the rectangle AB.BC is equal to the rectangle AC.BC, together with BC^2.

এই২ আয়ত সমূহের সমান। অতএব দুই সরল রেখা, ইত্যাদি।

বীজ গণিতের ধারায় উপপত্তি। খগ সমুদয় রেখার নাম যেন স এবং খঘ, ঘঙ, ঙগ যেন ক্রমশ ক, খ, গ, এবং অবিভক্ত রেখা ক যেন প। স = ক + খ + গ ∴ পস = প (ক + খ + গ) = পক + পখ + পগ।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

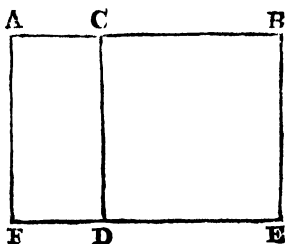
কোন সরল রেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমুদয় এবং এক২ অংশের অন্তর্গত দুই আয়ত একত্র সমুদয় রেখার সমচতুর্ভুজের তুল্য হইবে।

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত। কখ.খগ আয়ত ও কখ.কগ আয়ত একত্র কখ সমচতুর্ভুজ সমান। অর্থাৎ কখ.কগ + কখ.খগ = কখ^2।

কখ উপর কঘঙখ সমচতুর্ভুজ আঁক (১। ৪৬), এবং গ বিন্দু দিয়া গচ, কঘ কিম্বা খঙ সমানান্তরাল টান। তাহাতে কচ + গঙ = কঙ। অপর কচ = কঘ.কগ = কখ.কগ, কেননা কঘ = কখ। গঙ = খঙ.খগ = কখ.খগ। এবং কঙ = কখ^2। অতএব কখ.কগ + কখ.খগ = কখ^2। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

বী. উ.। কখ সমুদয় রেখার নাম যেন স, এবং কগ, খগ দুই অংশ যেন ক, খ। ক + খ = স ∴ কস + খস = স^2।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

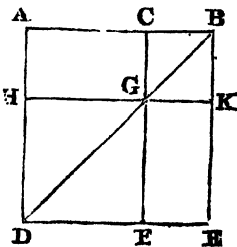
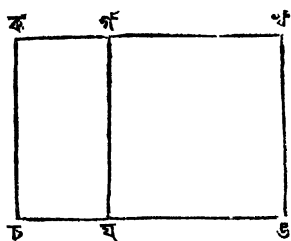
কোন সরল রেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমুদয় রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত দুই অংশের আয়ত ও পূর্ব্বোক্ত অংশের সমচতুর্ভুজের যোগ তুল্য হইবে।

Upon BC describe (46. 1.) the square CDEB, and produce ED to F, and through A draw (31. 1.) AF parallel to CD or BE; then AE=AD + CE. But AE=AB.BE=AB.BC, because BE=BC. So also AD=AC.CD=AC.CB; and CE=BC²; therefore AB.BC=AC.CB. + BC². Therefore. "*if a straight line*," *&c.* Q. E. D.

Dem. by Alg.—Let s stand for the whole line AB, and a, b for its two parts AC, CB. $s = a + b \therefore sb = ab + b^2$.

PROP. IV. THEOR.

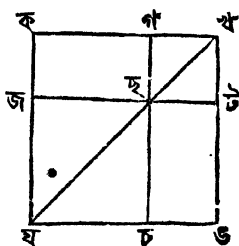
If a straight line be divided into any two parts, the square of the whole line is equal to the squares of the two parts, together with twice the rectangle contained by the parts.

Let the straight line AB be divided into any two parts in C; the square of AB is equal to the squares of AC, CB, and to twice the rectangle contained by AC. CB, that is, $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC.CB$.

Upon AB describe (46. 1.) the square ADEB, and join BD, and through C draw (31. 1.) CGF parallel to AD or BE, and through G draw HK parallel to AB or DE. And because CF is parallel to AD, and BD falls upon them, the exterior angle BGC is equal (29. 1.) to the interior and opposite angle ADB, but ADB is equal (5. 1) to the angle ABD because BA is equal to AD, being sides of a square; wherefore the angle CGB is equal to the angle GBC; and therefore the side BC

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে। কখ.খগ আয়ত কগ.গখ আয়ত ও খগ^2 উভয়ের যোগ তুল্য। খগ উপর গঘঙখ সমচতুর্ভুজ (১। ৪৬) আঁকিয়া ঙঘ চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং ক দিয়া (১। ৩১) কচ, গঘ কিম্বা খঙ সমানান্তরাল করিয়া টান, তাহাতে কঙ = কঘ + গঙ। অপর কঙ = কখ.খঙ = কখ.খগ, কেননা খঙ = খগ। ঐ রূপে কঘ = কগ.গঘ = কগ.গখ। এবং গঙ = খগ^2, সুতরাং কখ.খগ = কগ.গখ + খগ^2। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

বী. উ.। কখ সমুদয় রেখার নাম যেন স, এবং কগ, খগ দুই অংশ যেন ক, খ। স = ক + খ ∴ সখ = কখ + খ^2।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমুদয় রেখার সমচতুর্ভুজ দুই অংশের দুই সমচতুর্ভুজ এবং দুই অংশের অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণের তুল্য হইবে।

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হউক। কখ সমচতুর্ভুজ কগ, গখ উভয়ের সমচতুর্ভুজ এবং কগ ও গখ অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ তুল্য, অর্থাৎ কখ^2 = কগ^2 + গখ^2 + ২কগ.গখ।

কখ উপর কঘঙখ সমচতুর্ভুজ (১। ৪৬) অঙ্কিত করিয়া খ ঘ সংযুক্ত কর এবং গ দিয়া গছচ রেখা কঘ কিম্বা খঙ সমানান্তরাল করিয়া টান এবং ছ দিয়া জট কখ কিম্বা ঘঙ সমানান্তরাল করিয়া

is equal (6. 1.) to the side CG: but CB is equal (34. 1.) also to GK, and CG to BK; wherefore the figure CGKB is equilateral. It is likewise rectangular; for the angle CBK being a right angle, the other angles of the parallelogram CGKB are also right angles (Cor. 46. 1.) Wherefore CGKB is a square, and it is upon the side CB. For the same reason, HF also is a square, and it is upon the side HG, which is equal to AC; therefore HF, CK are the squares of AC, CB. And because the complement AG is equal (43. 1.) to the complement GE; and because AG=AC.CG=AC.CB, therefore also GE= AC.CB, and AG + GE=2AC.CB. Now, HF=AC^2, and CK=CB^2; therefore, HF + CK + AG + GE =AC^2 + CB^2 + 2AC.CB.

But HF+CK+ AG+GE=the figure AE, or AB^2; therefore AB^2=AC^2 +CB^2+ 2AC.CB. Wherefore, "*if a straight line be divided,*" &c. Q. E. D.

COR. From the demonstration, it is manifest that *the parallelograms about the diagonal of a square are likewise squares.*

Dem. by Alg.—Let s stand for the whole line AB and a, b, for its two parts AC, CB. $s = a + b$ ∴ $s^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

PROP. V. THEOR.

If a straight line be divided into two equal parts, and also into two unequal parts; the rectangle contained by the unequal parts, together with the square of the line between the points of section, is equal to the square of half the line.

Let the straight line AB be divided into two equal parts in the point C, and into two unequal parts in the point D; the rectangle AD.DB, together with the square of CD, is equal to the square of CB, or AD. DB+CD^2=CB^2.

Upon CB describe (46. 1.) the square CEFB, join BE, and through D draw (31. 1.) DHG parallel to CE

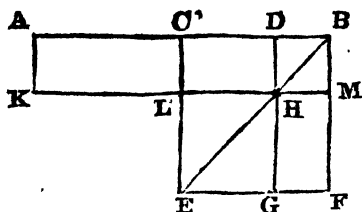
টান। অপর গচ কঘ সমানান্তরাল হওয়াতে তাহাদের উপর খঘ পাতে বহিস্থ খছগ কোণ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি কঘখ কোণের সমান হইতেছে (১। ২৯)। কিন্তু কখঘ ও কঘখ সমান (১। ৫) কেননা কখ কঘ সমচতুর্ভুজের বাহু হইয়া সমান হইতেছে, সুতরাং গছখ ও গখছ সমান, অতএব গখ গছ সমান (১। ৬), এবং গখ ছট সমান ও গছ খট সমান হওয়াতে গছটখ ক্ষেত্র সমবাহুক, আর ইহা সমকোণিও বটে, কেননা গখট কোণ সমকোণ হওয়াতে গছটখ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের অন্যান্য কোণও সমকোণ (১। ৪৬, অনু); সুতরাং গছটখ সমচতুর্ভুজ হইয়া গখ উপর আছে। ঐ কারণে জচও সমচতুর্ভুজ এবং তাহা কগ সমান যে জছ রেখা তাহার উপর আছে সুতরাং জচ গট ক্রমশ কগ গখ রেখার সমচতুর্ভুজ। অপর অবশিষ্ট কছ অবশিষ্ট ছঙ সমান এবং কছ $=$ কগ.গছ $=$ কগ. গখ অতএব ছঙ $=$ কগ.গখ এবং কছ $+$ ছঙ $=$ ২কগ.গখ। পরন্তু জচ $=$ কগ^২ এবং গট $=$ গখ^২ অতএব জচ $+$ গট $+$ কছ $+$ ছঙ $=$ কগ^২ $+$ গখ^২ $+$ ২কগ.গখ। অপর জচ $+$ গট $+$ কছ $+$ ছঙ $=$ কঙ ক্ষেত্র অর্থাৎ কখ^২। সুতরাং কখ^২ $=$ কগ^২ $+$ গখ^২ $+$ ২কগ.গখ। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

অনুমান। এই উপপত্তিতে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে সমচতুর্ভুজের কর্ণের পার্শ্বস্থ সমানান্তরাল ক্ষেত্রও সমচতুর্ভুজ হইবে।

বী. উ.। কখ সমুদয় রেখার নাম যেন স, এবং কখ, খগ দুই অংশ যেন ক, খ। স $=$ ক $+$ খ $\therefore$ স^২ $=$ (ক $+$ খ) $\times$ (ক $+$ খ) $=$ ক^২ $+$ ২কখ $+$ খ^২।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দুই সমান ও দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হইলে দুই অসমান ভাগের অন্তর্গত আয়ত ও ছেদ চিহ্ন দ্বয়ের মধ্যস্থ রেখার সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে অর্দ্ধেক রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে।

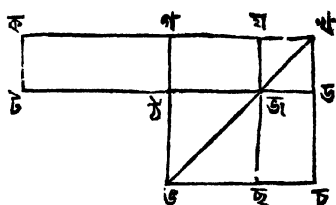
or BF; and through H draw KLM parallel to CB or EF; and also through A draw AK parallel to CL, or BM: And because CH=HF (43. 1.) if DM be added to both, CM=DF. But AL=(36. 1.) CM, therefore AL=DF, and adding CH to both, AH=gnomon CMG. But AH =AD.DH=AD.DB, because DH=DB (Cor. 4. 2.); therefore gnomon CMG=AD.DB. To each add LG= CD^2, then gnomon CMG+LG=AD.DB+CD^2. But CMG+LG=BC^2, therefore AD.DB+CD^2 = BC^2. Wherefore "*if a straight line*," &c. Q. E. D.

"COR. From this proposition it is manifest, that "*the difference of the squares of two unequal lines,* "AC, CD, *is equal to the rectangle contained by their* "*sum and difference*, or that $AC^2 - CD^2 = (AC+CD)$. "$(AC-CD)$."

Dem. by Alg.—If a stand for each of the equal parts AC, CB, and b for the line between the points of section i. e. CD, then $a + b$ shall represent the greater of the unequal parts AD, and $a-b$ the less BD. $(a + b) \times (a-b) = a^2-b^2 \therefore (a + b) \times (a-b) + b^2 = a^2-b^2 + b^2 = a^2$.

PROP. VI. THEOR.

If a straight line be bisected, and produced to any point; the rectangle contained by the whole line thus produced, and the part of it produced, together with the square of half the line bisected, is equal to the square of the straight line which is made up of the half and the part produced.

Let the straight line AB be bisected in C, and produced to the point D; the rectangle AD.DB, to-

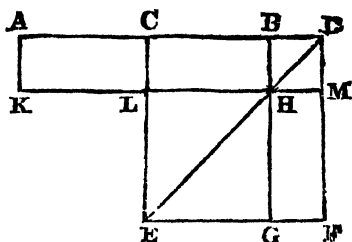
কখ রেখা গ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ও ঘ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হউক। কঘ.ঘখ এবং গঘ সমচতুর্ভুজ একত্র গখ সমচতুর্ভুজের তুল্য হইবে অর্থাৎ কঘ.ঘখ + গঘ² = গখ²। গখ উপর গঙচখ সমচতুর্ভুজ আঁক (১। ৪৬), খ ঙ সংযুক্ত কর, এবং ঘ দিয়া ঘজছ গঙ কিম্বা খচ রেখার সমানান্তরাল করিয়া টান (১। ৩১), এবং ক দিয়া কট, গঠ কিম্বা খড রেখার সমানান্তরাল টান। অপর গজ = জচ (১। ৪৩), এবং উভয় পক্ষে ঘড যোগ করিলে গড = ঘচ। কিন্তু কঠ = গড (১। ৩৬), সুতরাং কঠ = ঘচ। উভয় পক্ষে গজ যোগ করিলে কজ = শঙ্কু গডছ। অপর কজ = কঘ.ঘজ = কঘ.ঘখ কেননা ঘজ = ঘখ (২। ৪. অনু.), সুতরাং শঙ্কু গডছ = কঘ.ঘখ। উভয় পক্ষে ঠছ = গঘ² যোগ কর তাহাতে শঙ্কু গডছ + ঠছ = কঘ.ঘখ + গঘ²। কিন্তু গডছ + ঠছ = খগ² সুতরাং কঘ.ঘখ + গঘ² = খগ²। অতএব, ইত্যাদি।

অনুমান। অতএব কগ, গঘ দুই অসমান রেখার সমচতুর্ভুজের অন্তর তাহাদের যোগ ও অন্তরের আয়ত তুল্য, অর্থাৎ কগ² — গঘ² = (কগ + গঘ). (কগ — গঘ)।

বী. উ.। কগ খগ দুই সমান অংশের প্রত্যেকের নাম যেন ক, এবং গঘ অর্থাৎ ছেদ চিহ্ন দ্বয়ের অধ্যস্থ রেখা যেন খ, তাহাতে ক + খ অসমান অংশের বৃহত্তর যে কঘ তদ্বাচক হইবে, এবং ক — খ লঘুতর খঘ বাচক হইবে। (ক + খ) × (ক — খ) = ক² — খ² ∴ (ক + খ) × (ক — খ) + খ² = ক² — খ² + খ² = ক²।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দ্বিখণ্ড হইয়া কোন বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে এই রূপ বর্দ্ধিত সমুদয় রেখা ও তাহার বর্দ্ধিত অংশের অন্তর্গত

gether with the square of CB, is equal to the square of CD.

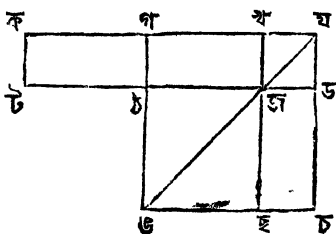
Upon CD describe (46. 1.) the square CEFD, join DE, and through B draw (31. 1.) BHG parallel to CE or DF, and through H draw KLM parallel to AD or EF, and also through A draw AK parallel to CL or DM. And because AC is equal to CB, the rectangle AL is equal (36. 1.) to CH; but CH is equal (43. 1.) to HF: therefore, also AL is equal to HF. To each of these add CM: therefore the whole AM is equal to the gnomon CMG. Now, AM= AD.DM=AD.DB, because DM (Cor. 4. 2.)= DB. Therefore gnomon CMG=AD.DB, and CMG+LG =AD.DB+CB². But CMG+LG=CF=CD², therefore AD.DB+CB² = CD². Therefore, "*if a straight line,*" *&c.* Q. E. D.

Dem. by Alg.—Let a stand for each of the equal parts AC, CB and b for BD the part produced; then $2a + b$ shall represent AD the whole line produced. $(2a + b) \times b = 2ab + b^2$ $\therefore$ $(2a + b) \times b + a^2 = 2ab + b^2 + a^2 = (a + b)^2$.

PROP. VII. THEOR.

If a straight line be divided into any two parts, the squares of the whole line, and of one of the parts, are equal to twice the rectangle contained by the whole and that part, together with the square of the other part.

Let the straight line AB be divided into any two parts in the point C; the squares of AB, BC, are equal to twice the rectangle AB.BC, together with the square of AC, or AB² + CB² =2AB.BC+AC².

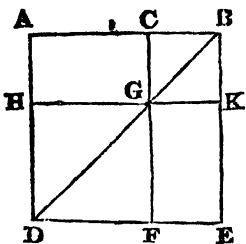
আয়ত এবং দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধের সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে ঐ অর্দ্ধ রেখা এবং বর্দ্ধিত অংশের যোগে উৎপন্ন রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে।

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইয়া ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাউক। কঘ.খঘ আয়ত এবং গখ সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে গঘ সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে। গঘ উপর গঙচঘ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত

কর (১। ৪৬), ঘ ঙ সংযুক্ত কর এবং খ দিয়া খজছ গঙ কিম্বা ঘচ রেখার সমানান্তরাল টান (১। ৩১), এবং জ দিয়া টঠড কঘ কিম্বা ঙচ সমানান্তরাল টান এবং ক দিয়া কট গঠ কিম্বা ঘড সমানান্তরাল টান। অপর কগ গখ সমান হওয়াতে কঠ আয়ত গজ সহিত সমান (১। ৩৬), কিন্তু গজ জচ সমান (১। ৪৩), সুতরাং কঠ জচ সমান, এবং উভয়ে গড যোগ করিলে, সমুদয় কড গডছ শঙ্কুর সমান। অনন্তর কড = কঘ. ঘড = কঘ.ঘখ কেননা ঘড = ঘখ (২। ৪. অনু) অতএব শঙ্কু গডছ = কঘ.ঘখ, ও কডছ + ঠছ = কঘ. ঘখ + গখ²। অপর গডছ + ঠছ = গচ = গঘ² সুতরাং কঘ. ঘখ + গখ² = গঘ²। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

বী. উ.। কগ, খগ দুই সমান অংশের প্রত্যেকের নাম যেন ক, এবং খঘ বর্দ্ধিত অংশ যেন খ, তাঁহাতে ২ক + খ, কঘ সমুদয় বর্দ্ধিত রেখাকে বুঝাইবে। $(২ক + খ) \times খ = ২কখ + খ^২ \therefore (২ক + খ) \times খ + ক^২ = ২কখ + খ^২ + ক^২ = (ক + খ)^২$

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

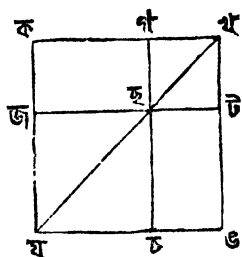
কোন সরল রেখা দুই ভাগে বিভক্ত হইলে সমুদয় রেখার এবং এক ভাগের দুই সমচতুর্ভুজ, সমুদয় রেখা এবং ঐ ভাগের দ্বিগুণিত আয়ত ও অন্য ভাগের সমচতুর্ভুজের তুল্য হইবে।

Upon AB describe (46. 1.) the square ADEB, and construct the figure as in the preceding propositions: Because AG=GE (43. 1.), AG+CK=GE+CK, that is, AK=CE, and therefore AK+CE=2AK. But AK+CE=gnomon AKF+CK; and therefore, AKF+CK=2AK =2AB.BK = 2AB.BC, because BK=(Cor. 4. 2.) BC. Since then, AKF+CK=2AB.BC, AKF+CK+HF=2AB.BC+HF; and because AKF+HF=AE=AB^2, AB^2 +CK =2AB.BC+HF, that is, (since CK=CB^2, and HF=AC^2,) $AB^2+CB^2=2AB.BC+AC^2$. Wherefore, "*if a straight line, &c.* Q. E. D.

Otherwise:

"Because $AB^2=AC^2+BC^2+2AC.BC$ (4.2.), adding "BC^2 to both, $AB^2+BC^2=AC^2+2BC^2+2AC.BC$. "But $BC^2+AC.BC=AB.BC$ (3. 2.); and therefore, "$2BC^2+2AC.BC=2AB.BC$; and therefore AB^2+ "$BC^2=AC^2+2AB.BC$."

COR. Hence, *the sum of the squares of any two "lines is equal to twice the rectangle contained by the "lines together with the square of the difference of the "lines."*

Dem. by Alg.—Let s stand for the whole line AB, and a, b, for the parts AC, CB. Then $s = a + b$ $\therefore$ $s^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\therefore$ $s^2 + b^2 = a^2 + 2ab + 2b^2 = a^2 + (a+b) \times 2b = a^2. + 2sb$; since $s = a + b$.

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই ভাগে বিভক্ত হউক। কখ ও গখ সমচতুর্ভুজ কখ.খগ আয়তের দ্বিগুণ ও কগ সমচতুর্ভুজ এই দুএর যোগ তুল্য, অর্থাৎ কখ^২ + খগ^২ = ২কখ.গখ + কগ^২।

কখ উপর কঘঙখ সমচতুর্ভুজ আঁক (১। ৪৬), এবং পূর্ব্বোক্ত প্রতিজ্ঞার ন্যায় ক্ষেত্রের ন্যাস কর। কছ = ছঙ (১। ৪৩), অতএব কছ + গট = ছঙ + গট অর্থাৎ কট = গঙ, সুতরাং কট + গঙ = ২কট। অপর কট + গঙ = শঙ্কু কটচ + গট অতএব কটচ + গট = ২ কট = ২ কখ.খট = ২কখ. খগ কেননা খট = খগ (২। ৪ অনু.)। কটচ + গট = ২ কখ.খগ অতএব কটচ + গট + জচ = ২কখ.খগ + জচ। এবং কটচ + জচ = কঙ = কখ^২ সুতরাং কখ^২ + গট = ২ কখ.খগ + জচ অর্থাৎ (গট = গখ^২ ও জচ = কগ^২ হওয়াতে) কখ^২ + খগ^২ = ২কখ.খগ + কগ^২। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

প্রকারান্তরে উপপত্তি। কখ^২ = কগ^২ + খগ^২ + ২কগ. খগ (২। ৪)। উভয় পক্ষে খগ^২ যোগ করিলে কখ^২ + খগ^২ = কগ^২ + ২ খগ^২ + ২ কগ.খগ। অপর খগ^২ + কগ.খগ = কখ.খগ (২। ৩) অতএব ২ খগ^২ + ২কগ.খগ = ২কখ.খগ সুতরাং কখ^২ + খগ^২ = কগ^২ + ২ কখ. খগ।

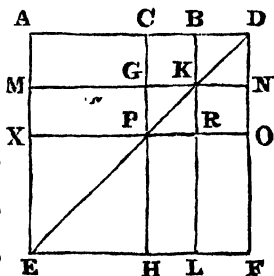
অনুমান অতএব দুই রেখার সমচতুর্ভুজের যোগ ঐ দুই রেখার অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং তাহাদের অন্তরের সমচতুর্ভুজ তুল্য।

বী. উ.। সমুদয় কখ রেখার নাম স, এবং কগ, খগ দুই অংশ যেন ক, খ, তাহাতে স = ক + খ ∴ স^২ = (ক + খ)^২ = ক^২ + ২কখ + খ^২ ∴ স^২ + খ^২ = ক^২ + ২কখ + ২খ^২ = ক^২ + (ক + খ) × ২খ = ২সখ + ক^২।

PROP. VIII. THEOR.

If a straight line be divided into any two parts, four times the rectangle contained by the whole line, and one of the parts, together with the square of the other part is equal to the square of the straight line which is made up of the whole and the first-mentioned part.

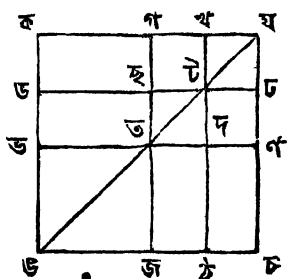
Let the straight line AB be divided into any two parts in the point C; four times the rectangle AB.BC together with the square of AC, is equal to the square of the straight line made up of AB and BC together.

Produce AB to D, so that BD be equal to CB, and upon AD describe the square AEFD; and construct two figures such as in the preceding. Because GK is equal (34. 1.) to CB, and CB to BD, and BD to KN, GK is equal to KN. For the same reason, PR is equal to RO; and because CB is equal to BD and KG to KN, the rectangles CK and BN are equal, as also the rectangles GR and RN: But CK is equal (43. 1.) to RN, because they are the complements of the parallelogram CO; therefore also BN is equal to GR; and the four rectangles BN, CK, GR, RN are therefore equal to one another, and so CK+BN+GR+RN= 4CK. Again, Because CB is equal to BD, and BD equal (Cor. 4. 2.) to BK, that is, to CG; and CB equal to GK, that (Cor. 4. 2.) is, to GP; therefore CG is equal to GP; and because CG is equal to GP, and PR to RO, the rectangle AG is equal to MP and PL to RF: But MP is equal (43. 1.) to PL, because they are the complements of the parallelogram ML; wherefore AG is equal also to RF: Therefore the four rectangles AG, MP, PL, RF, are equal to one another, and so AG+MP+PL+RF=4AG. And it was demonstrated, that

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দুই অংশে বিভক্ত হইলে সমুদয় রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত চতুর্গুণিত আয়ত অন্য অংশের সমচতুর্ভুজের সমেত, সমুদয় রেখা ও পূর্ব্বোক্ত অংশের যোগে উৎপন্ন রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে।

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হইতেছে। কখ.খগ আয়তের চতুর্গুণ এবং কগ সমচতুর্ভুজ ইহারা একত্র কখ ও খগ যোগে উৎপন্ন রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য।

কখ ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া খঘ খগ সমান কর এবং কঘ উপর কঙচঘ সমচতুর্ভুজ আঁক এবং পূর্ব্বোক্ত প্রতিজ্ঞার ন্যায় দুই ক্ষেত্র কর। ছট খগ সমান (১। ৩৪) এবং খগ খঘ সমান ও খঘ টঢ সমান সুতরাং ছট টঢ সমান। ঐ কারণে তদ দণ সমান, এবং খগ খঘ সমান ও টছ টঢ সমান হওয়াতে গট খঢ আয়ত পরস্পর সমান এবং ছদ ও দঢ তদ্রূপ সমান। অপর গট দঢ সমান (১। ৪৩), কেননা তাহারা গণ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের দুই অবশিষ্ট, অতএব খঢ ও ছদও সমান তন্নিমিত্তে খঢ গট ছদ দঢ এই চারি আয়ত পরস্পর সমান, সুতরাং গট + খঢ + ছদ + দঢ = ৪ গট। অপর খগ খঘ সমান এবং (২। ৪. অনু.) খঘ খট অর্থাৎ গছ সমান ও গখ ছট অর্থাৎ ছত সমান হওয়াতে গছ ছত সমান। এবং গছ ছত সমান ও তদ দণ সমান হওয়াতে

কছ আয়ত ডত আয়ত সমান এবং তঠ দচ সমান। কিন্তু ডত তঠ সমান (১। ৪৩) কেননা তাহারা ডঠ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের দুই অবশিষ্ট সুতরাং কছ ও দচ সমান অতএব কছ ডত তঠ দচ এই চারি আয়ত পরস্পর সমান এবং কছ + ডত + তঠ + দচ = ৪কছ। পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে গট

CK+BN+GR+RN=4CK; wherefore adding equals to equals, the whole gnomon AOH=4AK. Now AK =AB.BK=AB.BC, and 4AK=4AB.BC; therefore, gnomon AOH=4AB.BC; and adding XH or (Cor. 4. 2.) AC^2, to both, gnomon AOH+XH=4AB.BC+AC^2. But AOH+XH=AF=AD^2; therefore AD^2= 4AB.BC+AC^2. Now AD is the line that is made up of AB and BC, added together into one line: Wherefore, *if a straight line, &c.* Q. E. D.

"Cor. 1. Hence, because AD is the sum, and AC "the difference of the lines AB and BC; *four times "the rectangle contained by any two lines together with "the square of their difference, is equal to the square "of the sum of the lines.*"

"Cor. 2. From the demonstration it is manifest, "that since the square of CD is quadruple of the "square of CB; *the square of any line is quadruple of "the square of half that line.*"

Otherwise:

"Because AD is divided any how in C (4. 2.), AD^2 "=AC^2 + CD^2 +2 CD.AC. But CD=2 CB: and "therefore CD^2=CB^2 +BD^2 +2CB.BD=$4CB^2$, and "also 2CD.AC=4CB AC; therefore, AD^2 = AC^2 "+ $4BC^2$ +4BC.AC. Now BC^2 + BC.AC=AB.BC "(3. 2.); and therefore AD^2 = AC^2 + 4AB.BC." Q. E. D.

Dem. by Alg. Let s stand for the whole line AB and a, b, for the parts AC, CB. Then $s = a + b$ $\therefore$ $s-b = a$ $\therefore$ $(s-b)^2 = a^2$ i. e. $a^2 = s^2-2sb + b^2$ and by adding $4sb$ to both we have $4sb + a^2 = s^2-2sb + b^2 + 4sb = s^2 + 2sb + b^2 = (s + b)^2$.

+ খট + ছদ + দণ = ৪গট, অতএব সমানে সমান যোগ করিলে, সমুদয় শঙ্কু কণজ = ৪ কট। অপর কট = কখ.খট = কখ.খগ এবং ৪কট = ৪ কখ.খগ সুতরাং শঙ্কু কণজ = ৪ কখ.খগ, এবং ভজ অর্থাৎ কগ^{২} (২। ৪. অনু.) উভয়ে যোগ করিলে শঙ্কু কণজ + ভজ = ৪ কখ.খগ + কগ^{২}। কিন্তু কণজ + ভজ = কচ = কঘ^{২} অতএব কঘ^{২} = ৪ কখ. খগ + কগ^{২}। আর কঘ রেখা কখ ও খগ যোগে উৎপন্ন হইয়াছে। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

১ অনু.। অতএব কখ ও খগ রেখার যোগ কঘ এবং অন্তর কগ হওয়াতে কোন দুই রেখার অন্তর্গত আয়তের চতুর্গুণ তাহাদের অন্তরের সমচতুর্ভুজ সমেত দুই রেখার যোগের সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে।

২ অনু.। গঘ সমচতুর্ভুজ খগ সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ হওয়াতে কোন রেখার সমচতুর্ভুজ তাহার অর্দ্ধের সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ হইবে ইহা এই উপপত্তি হইতে স্পষ্ট বোধ হইতেছে।

প্রকারান্তরে উপপত্তি। কঘ গ বিন্দুতে বিভক্ত হইয়াছে অতএব (২। ৪) কঘ^{২} = কগ^{২} + গঘ^{২} + ২ গঘ. কগ। অপর গঘ = ২খগ সুতরাং গঘ^{২} = খগ^{২} + খঘ^{২} + ২ খগ.খঘ = ৪গখ^{২} এবং ২গঘ.কগ = ৪ খগ.কগ। অতএব কঘ^{২} = কগ^{২} + ৪ খগ^{২} + ৪ খগ.কগ। অপর খগ^{২} + খগ.কগ = কখ. খগ (২। ৩) অতএব কঘ^{২} = কগ^{২} + ৪ কখ.খগ।

বী. উ.। সমুদয় কখ রেখার নাম যেন স এবং কগ খগ দুই অংশ যেন ক, খ। তাহাতে স = ক + খ ∴ স − খ = ক ∴ (স − খ)^{২} = ক^{২} অর্থাৎ ক^{২} = স^{২} − ২সখ + খ^{২}। উভয়ে ৪সখ যোগ করিলে ৪সখ + ক^{২} = স^{২} − ২সখ + খ^{২} + ৪সখ = স^{২} + ২সখ + খ^{২} = (স + খ)^{২}।

PROP. IX. THEOR.

If a straight line be divided into two equal, and also into two unequal parts; the squares of the two unequal parts are together double of the square of half the line, and of the square of the line between the points of section.

Let the straight line AB be divided at the point C into two equal, and at D into two unequal parts: The squares of AD, DB are together double of the squares of AC, CD.

From the point C draw (11. 1.) CE at right angles to AB, and make it equal to AC or CB, and join EA EB; through D draw (31. 1.) DF parallel to CE, and through F draw FG parallel to AB; and join AF: Then, because AC is equal to CE, the angle EAC is equal (5. 1.) to the angle AEC; and because the angle ACE is a right angle, the two others AEC, EAC together make one right angle (32. 1.); and they are equal to one another; each of them therefore is half a right angle. For the same reason, each of the angles CEB, EBC is half a right angle: and therefore the whole AEB is a right angle; And because the angle, GEF is half a right angle, and EGF a right angle, for it is equal (29. 1.) to the interior opposite angle ECB, the remaining angle EFG is half a right angle; therefore the angle GEF is equal to the angle EFG, and the side EG equal (6. 1.) to the side GF: Again, because the angle at B is half a right angle; and FDB a right angle, for it is equal (29. 1.) to the interior opposite angle ECB, the remaining angle BFD is half a right angle; therefore the angle at B is equal to the angle BFD, and the side DF to (6. 1.) the side DB. Now, because AC = CE, $AC^2 = CE^2$, and $AC^2 + CE^2 = 2AC^2$. But (47. 1.) $AE^2 = AC^2 + CE^2$;

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা দুই সমান এবং দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হইলে দুই অসমান ভাগের দুই সমচতুর্ভুজ একত্র অর্দ্ধেক রেখার ও ছেদচিহ্নের মধ্যস্থ রেখার সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ও ঘ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হইতেছে। কঘ, ঘখ দুই রেখার সমচতুর্ভুজ একত্র কগ, গঘ রেখার সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

গ বিন্দু হইতে গঙ, কখ রেখার উপর লম্বভাবে (১। ১১) টানিয়া তাহাকে কগ কিম্বা গখ সমান কর এবং ঙ ক ও ঙ খ সংযুক্ত কর। ঘ দিয়া (১। ৩১) ঘচ গঙ সমানান্তরাল টান এবং চ দিয়া চছ কখ সমানান্তরাল টান ও ক চ সংযুক্ত কর। কগ গঙ সমান হওয়াতে (১। ৫) ঙকগ কোণ কঙগ কোণের সমান। এবং কগঙ সমকোণ হওয়াতে অন্য দুই কোণ ঙকগ ও কঙগ (১। ৩২) একত্র এক সমকোণ, আর তাহারা পরস্পর সমান হওয়াতে প্রত্যেকে এক অর্দ্ধ সমকোণ। ঐ কারণে গঙখ ও ঙখগ কোণও প্রত্যেকে অর্দ্ধ সমকোণ সুতরাং সমুদয় কঙখ কোণ এক সমকোণ। অপর ছঙচ অর্দ্ধ সমকোণ এবং ঙছচ (১। ২৯) অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি ঙগখ সমান হওয়াতে এক সমকোণ হইতেছে, সুতরাং ঙচছও অর্দ্ধ সমকোণ, তন্নিমিত্তে ছঙচ ও ঙচছ পরস্পর সমান সুতরাং ছঙ বাহু ছচ সমান (১। ৬)। অপর খ কোণ অর্দ্ধ সমকোণ এবং চঘখ অন্তরস্থ সম্মুখবর্ত্তি ঙগখ সমান হওয়াতে এক সমকোণ, সুতরাং অবশিষ্ট খচঘ কোণও অর্দ্ধ সমকোণ, অতএব খ কোণ খচঘ সমান এবং (১। ৬) চঘ খঘ বাহুও পরস্পর সমান। কগ = গঙ সুতরাং $কগ^২ = গঙ^২$ এবং $কগ^২ + গঙ^২ = ২কগ^২$ কিন্তু (১। ৪৭) $কঙ^২ =$

therefore $AE^2 = 2AC^2$. Again, because EG=GF, $EG^2 = GF^2$, and $EG^2 + GF^2 = 2GF^2$. But $EF^2 = EG^2 + GF^2$; therefore, $EF^2 = 2GF^2 = 2CD^2$ because (34. 1.) CD=GF. And it was shown, that $AE^2 = 2AC^2$; therefore $AE^2 + EF^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. But (47. 1.) $AF^2 = AE^2 + EF^2$, and $AD^2 + DF^2 = AF^2$ or $AD^2 + DB^2 = AF^2$; therefore, also $AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. Therefore, "*if a straight line*," *&c.* Q. E. D.

Otherwise:

"Because $AD^2 =$ (4. 2.) $AC^2 + CD^2 + 2AC.CD$, "and $DB^2 + 2BC.CD =$ (7. 2.) $BC^2 + CD^2 = AC^2$ "$+CD^2$, by adding equals to equals, $AD^2 + BD^2 + 2BC.$ "$CD = 2AC^2 + 2CD^2 + 2AC.CD$; and therefore taking "away the equal rectangles 2BC.CD and 2AC.CD, "there remains $AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2$."

Dem. by Alg.—Let a stand for each of the equal parts AC, CB and b for CD the line between the points of section; then $a + b$ shall represent the greater of the two unequal parts, and $a-b$ the less. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ and $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\therefore (a + b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$.

PROP. X. THEOR.

If a straight line be bisected, and produced to any point; the square of the whole line thus produced, and the square of the part of it produced, are together double of the square of half the line bisected, and of the square of the line made up of the half and the part produced.

Let the straight line AB be bisected in C, and produced to the point D; the squares of AD, DB are double of the squares of AC, CD.

From the point C draw (11. 1.) CE at right angles to AB, and make it equal to AC or CB; join AE, EB; through E draw (31. 1.) EF parallel to AB, and through D draw DF parallel to CE. And because the straight line EF meets the parallels EC, FD, the angles

কগ^২ + গঙ^২ সুতরাং কঙ^২ = ২কগ^২। পুনশ্চ ঙছ = চছ সুতরাং ঙছ^২ = চছ^২ এবং ঙছ^২ + চছ^২ = ২চছ^২ কিন্তু ঙচ^২ = ঙছ^২ + চছ^২ সুতরাং ঙচ^২ = ২চছ^২ = ২গঘ^২ কেননা (১। ৩৪) গঘ = চছ। পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে কঙ^২ = ২কগ^২ সুতরাং কঙ^২ + ঙচ^২ = ২ কগ^২ + ২ গঘ^২। কিন্তু (১। ৪৭) কচ^২ = কঙ^২ + ঙচ^২ এবং কঘ^২ + ঘচ^২ = কচ^২, অর্থাৎ কঘ^২ + খঘ^২ = কচ^২ সুতরাং কঘ^২ + খঘ^২ = ২ কগ^২ + ২ গঘ^২। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

প্রকারান্তরে উপপত্তি। কঘ^২ = কগ^২ + গঘ^২ + ২ কগ. গঘ (২। ৪) এবং খঘ^২ + ২খগ.গঘ = খগ^২ + গঘ^২ (২। ৭) = কগ^২ + গঘ^২ সুতরাং সমানে সমান যোগ করিলে কঘ^২ + খঘ^২ + ২খগ.গঘ = ২কগ^২ + ২গঘ^২ + ২কগ.গঘ, এবং উভয় হইতে সমান২ আয়ত ২খগ.গঘ এবং ২কগ.গঘ বিয়োগ করিলে কঘ^২ + খঘ^২ = ২কগ^২ + ২গঘ^২।

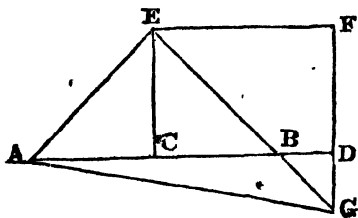
বী. উ.। কগ, খগ দুই সমান অংশের প্রত্যেকের নাম যেন ক এবং ছেদ চিহ্নের মধ্যস্থ খঘ রেখার নাম যেন খ। তাহাতে ক + খ অসমান অংশের বৃহত্তর হইবে এবং ক — খ লঘুতর। (ক + খ)^২ = ক^২ + ২কখ + খ^২ এবং (ক — খ)^২ = ক^২ — ২কখ + খ^২ ∴ (ক + খ)^২ + (ক — খ)^২ = ২ক^২ + ২খ^২।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

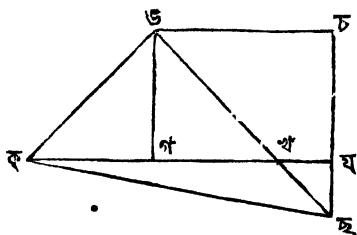
কোন সরল রেখা দ্বিখণ্ড হইয়া কোন বিন্দু পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে সমুদয় বর্দ্ধিত রেখার এবং বর্দ্ধিত অংশের দুই সমচতুর্ভুজ একত্র দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধের এবং অর্দ্ধ ও বর্দ্ধিত অংশের যোগে উৎপন্ন রেখার দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

কখ সরল রেখা গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইয়া ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইয়াছে, কঘ খঘ রেখার দুই সমচতুর্ভুজ একত্র কগ গঘ রেখার দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

গ বিন্দু হইতে গঙ কখ রেখার উপর লম্বভাবে টানিয়া তাহা কগ কিম্বা খগ সমান কর। ক ঙ ও ঙ খ সংযুক্ত কর।

CEF, EFD are equal (29. 1.) to two right angles; and therefore the angles BEF, EFD are less than two right angles: But straight lines which, with another straight line, make the interior angles, upon the same side, less than two right angles, do meet (Cor. 29. 1.) if produced far enough: Therefore EB, FD will meet, if produced towards B, D; let them meet in G, and join AG: then, because AC is equal to CE, the angle CEA is equal (5. 1.) to the angle EAC; and the angle ACE is a right angle; therefore each of the angles CEA, EAC is half a right angle (32. 1.): For the same reason, each of the angles CEB, EBC is half a right angle; therefore AEB is a right angle: And because EBC is half a right angle, DBG is also (15. 1.) half a right angle, for they are vertically opposite; but BDG is a right angle, because it is equal (29. 1.) to the alternate angle DCE; therefore the remaining angle DGB is half a right angle, and is therefore equal to the angle DBG; wherefore also the side DB is equal (6. 1.) to the side DG. Again, because EGF is half a right angle, and the angle at F a right angle, being equal (34. 1.) to the opposite angle ECD, the remaining angle FEG is half a right angle, and equal to the angle EGF; wherefore also the side GF is equal (6. 1.) to the side FE. And because

$EC=CA$, $EC^2+CA^2=2CA^2$. Now $AE^2=$ (47. 1.) AC^2+CE^2: therefore, $AE^2=2AC^2$. Again, because $EF=FG$, $EF^2=FG^2$, and $EF^2+FG^2=2EF^2$. But $EG^2=$(47. 1.) EF^2+FG^2; therefore $EG^2=2EF^2$; and since $EF=CD$, $EG^2=2CD^2$. And it was demonstrated, that $AE^2=2AC^2$; therefore $AE^2+EG^2=2AC^2+2CD^2$. Now, $AG^2=AE^2+EG^2$, wherefore $AG^2=2AC^2+2CD^2$, but AG^2 (47. 1.)$=AD^2+DG^2$

ঙ দিয়া (১। ৩১) ঙচ কখ সমানান্তরাল টান এবং ঘ দিয়া ঘচ গঙ সমানান্তরাল টান। ঙগ চঘ সমানান্তরাল রেখার উপর ঙচ পাতে (১। ২৯) গঙচ ও ঙচঘ একত্র দুই সমকোণ তুল্য হইতেছে সুতরাং খঙচ ও ঙচঘ দুই সমকোণের ন্যূন হইতেছে। অপর যে২ সরল রেখা অন্য সরল রেখার সম্পাতে এক পার্শ্বের দুই অন্তরস্থ কোণকে দুই সমকোণের ন্যূন করে তাহারা বৃদ্ধি পাইলে মিলিবে (১। ২৯. অনু.) অতএব ঙখ ও ঘচ বৃদ্ধি পাইলে খ ঘ দিকে মিলিবে, তাহারা যেন ছ বিন্দুতে মিলিতেছে। ক ছ সংযুক্ত কর। কগ গঙ সমান সুতরাং গকঙ ও কঙগ কোণ পরস্পর সমান (১। ৫) এবং কগঙ সমকোণ হওয়াতে গকঙ ও কঙগ প্রত্যেকে অর্দ্ধ সমকোণ (১। ৩২)। ঐ কারণে গঙখ ও গখঙ কোণও প্রত্যেকে অর্দ্ধ সমকোণ সুতরাং ক-

ঙখ এক সমকোণ, এবং ঙখগ অর্দ্ধ সমকোণ হওয়াতে তাহার সম্মুখস্থ ঘখছ কোণও অর্দ্ধ সমকোণ (১। ১৫), আর খঘছ সমকোণ কেননা তাহা ভিন্ন পার্শ্বস্থ ঙগঘ সমান (১। ২৯) অতএব অবশিষ্ট কোণ ঘছখ অর্দ্ধ সমকোণ হইয়া ঘখছ সমান হইতেছে সুতরাং খঘ ও ঘছ বাহুও পরস্পর সমান (১। ৬)। অপর ঙছচ অর্দ্ধ সমকোণ ও চ কোণ সম্মুখস্থ ঙগঘ সমান হইয়া (১। ৩৪) সমকোণ হওয়াতে অবশিষ্ট চঙছ কোণও অর্দ্ধ সমকোণ হইয়া চছঙ সমান, সুতরাং ঙচ ও চছ বাহু পরস্পর সমান (১। ৬), পরে ঙগ $=$ গক সুতরাং গঙ^২ $+$ গক^২ $=$ ২গক^২, এবং কঙ^২ $=$ কগ^২ $+$ গঙ^২ (১। ৪৭), অতএব কঙ^২ $=$ ২কগ^২। অপর ঙচ $=$ চছ সুতরাং ঙচ^২ $=$ চছ^২ এবং ঙচ^২ $+$ চছ^২ $=$ ২ঙচ^২ কিন্তু ঙছ^২ $=$ ঙচ^২ $+$ চছ^২। অতএব ঙছ^২ $=$ ২ঙচ^২ এবং ঙচ $=$ গঘ হওয়াতে ঙছ^২ $=$ ২গঘ^২। পূর্ব্বে

$=AD^2 + DB^2$, because DG=DB : Therefore, $AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. Wherefore, "*if a straight line,*" *&c.* Q. E. D.

Dem. by Alg.—Let a stand for each of the equal parts AC,CB, and b for BD the part produced. Then $2a + b$ shall represent AD the whole line produced, and $a + b$ shall represent CD the half and the part produced. $(2a + b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$ ∴ $(2a+b)^2 + b^2 = 4a^2 + 4ab + 2b^2 = 2(2a^2 + 2ab + b^2) = 2(a^2 + 2ab + b^2 + a^2) = 2 \times (\overline{a+b}|^2 + a^2) = 2(a + b)^2 + 2a^2$.

PROP. XI. PROB.

To divide a given straight line into two parts, so that the rectangle contained by the whole, and one of the parts, may be equal to the square of the other part.

Let AB be the given straight line; it is required to divide it into two parts, so that the rectangle contained by the whole, and one of the parts, shall be equal to the square of the other part.

Upon AB describe (46. 1.) the square ABDC; bisect (10. 1.) AC in E, and join BE; produce CA to F, and make (3. 1.) EF equal to EB, and upon AF describe (46. 1,) the square FGHA; AB is divided in H, so that the rectangle AB, BH is equal to the square of AH.

Produce GH to K: Because the straight line AC is bisected in E, and produced to the point F, the rectangle CF.FA, together with the square of AE, is equal (6. 2.) to the square of EF: But EF is equal to EB; therefore the rectangle CF.FA, together with the square of AE, is equal to the square of EB. And the squares of BA, AE, are equal (47. 1.) to the square of EB, because the angle EAB is a right angle; therefore the rectangle CF.FA, together with the square of AE, is equal to the squares of BA, AE: take away the square of AE, which is common to both,

দর্শিত হইয়াছে $কঙ^২ = ২কগ^২$ সুতরাং $কঙ^২ + ঙছ^২ = ২কগ^২ + ২গঘ^২$। অপর $কছ^২ = কঙ^২ + ঙছ^২$ সুতরাং $কছ^২ = ২কগ^২ + ২গঘ^২$ কিন্তু $কছ^২ = কঘ^২ + ঘছ^২ = কঘ^২ + খঘ^২$, কেননা ঘছ = খঘ সুতরাং $কঘ^২ + খঘ^২ = ২কগ^২ + ২গঘ^২$। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

বী. উ.। কগ, খগ দুই সমান অংশের প্রত্যেকের নাম যেন ক এবং খঘ বর্দ্ধিত অংশ যেন খ। তাহাতে সমুদয় বর্দ্ধিত রেখা কঘ, ২ক + খ হইবে, এবং অর্দ্ধ ও বর্দ্ধিত অংশের যোগ খঘ, ক + খ হইবে। অপর $(২ক + খ)^২ = ৪ক^২ + ৪কখ + খ^২ \therefore (২ক + খ)^২ + খ^২ = ৪ক^২ + ৪কখ + ২খ^২ = ২ (২ক^২ + ২কখ + খ^২) = ২ (ক^২ + ২কখ + খ^২ + ক^২) = ২ \times (\overline{ক + খ}|^২ + ক^২) = ২ (ক + খ)^২ + ২ক^২$।

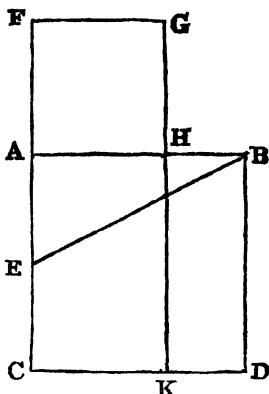
১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখাকে এমত রূপে ভাগ করিতে হইবে যে তাহাতে যেন সমুদয় এবং এক অংশের অন্তর্গত আয়ত অন্য অংশের সমচতুর্ভুজ তুল্য হয়।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা, ইহাকে এমত দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যে সমুদয় এবং এক অংশের আয়ত অন্য অংশের সমচতুর্ভুজ তুল্য হয়।

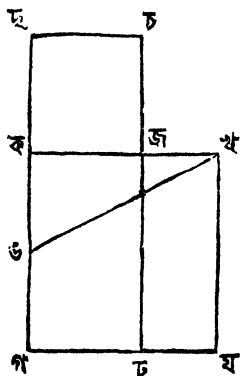
কখ উপর কখঘগ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত কর (১। ৪৬)। কগ ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (১। ১০) এবং খ ঙ সংযুক্ত কর। গক ছ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া ঙছ ঙখ সমান কর এবং কছ উপর ছচজক সমচতুর্ভুজ আঁক। কখ জ বিন্দুতে এমত রূপে বিভক্ত হইয়াছে যে কখ.খজ আয়ত কজ সমচতুর্ভুজ তুল্য।

চজ ট পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। কগ সরল রেখা ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইয়া ছ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইয়াছে এ নিমিত্তে গছ.ছক আয়ত কঙ সমচতুর্ভুজ সমেত ঙছ সমচতুর্ভুজের তুল্য (২। ৬)। অপর ঙছ ঙখ সমান সুতরাং গছ.ছক আয়ত কঙ সমচতুর্ভুজ সমেত ঙছ সমচতুর্ভুজের সমান। এবং কখ ও কঙ এ দুএর সমচতুর্ভুজ ঙখ সমচতুর্ভুজ তুল্য (১। ৪৭), কেননা খকঙ এক সম-

therefore the remaining rectangle CF.FA, is equal to the square of AB. Now, the figure FK is the rectangle CF.FA, for AF is equal to FG; and AD is the square of AB; therefore FK is equal to AD: take away the common part AK, and the remainder FH is equal to the remainder HD. But HD is the rectangle AB.BH, for AB is equal to BD; and FH is the square of AH; therefore the rectangle AB.BH is equal to the square of AH: Wherefore the straight line AB is divided in H, so that the rectangle AB.BH is equal to the square of AH. *Which was to be done.*

Dem. by Alg.—"A line thus divided is, in arithmetic, incommensurable; for there is no number whatever that can be so divided, that the product of the whole by one of its parts shall be equal to the square of the other part.—Let the whole line AB be represented by a, and let the part AH be called x, then will BH be equal to $a-x$, and AB $\times$ BH$=a\times(a-x)$ $=a^2-ax$; but AB $\times$ BH$=$AH^2, that is, $a^2-ax=x^2$, from which equation $x=\frac{1}{2}a\sqrt{5}-\frac{1}{2}a=$AH; and BH $=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}a\sqrt{5}$."—*Keith.*

PROP. XII. THEOR.

In obtuse angled triangles, if a perpendicular be drawn from any of the acute angles to the opposite side produced, the square of the side subtending the obtuse angle is greater than the squares of the sides containing the obtuse angle, by twice the rectangle contained by the side upon which, when produced, the perpendicular falls, and the straight line intercepted between the perpendicular and the obtuse angle.

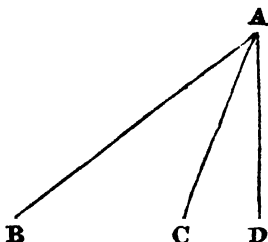
কোণ সুতরাং গছ.ছক আয়ত কঙ সমচতুর্ভুজ সমেত কখ কঙ এ দুএর সমচতুর্ভুজ তুল্য। উভয় হইতে সামান্য কঙ সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট গছ.ছক আয়ত কখ সমচতুর্ভুজের সমান হইবে। অপর ছট ক্ষেত্রই গছ.ছক আয়ত, কেননা কছ ছচ সমান, এবং কখ রেখার সমচতুর্ভুজ কঘ, সুতরাং ছট কঘ সমান। কট সামান্য অংশ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট ছজ জঘ সমান হইবে, অপর কখ.খজ আয়তই জঘ, কেননা

কখ খঘ সমান, এবং ছজ, কজ রেখার সমচতুর্ভুজ, অতএব কখ.খজ আয়ত কজ সমচতুর্ভুজের সমান। এই রূপে কখ সরল রেখা জ বিন্দুতে এমত রূপে বিভক্ত হইয়াছে যে কখ.খজ আয়ত কজ সমচতুর্ভুজের সমান, ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

বী. উ.। গণিত বিদ্যাতে এপ্রকারে বিভক্ত রেখা অপবর্ত্ত্য হইতে পারেনা, কেননা দুই ভাগ করিলে সমুদয় ও এক ভাগের গুণিত ফল অন্য ভাগের বর্গ সমান হয় এমত কোন সংখ্যা নাই। কখ সমুদয় রেখার নাম যেন ক এবং কজ অংশের নাম যেন অ; তাহাতে ক — অ, খজ হইবে। কখ $\times$ খজ $=$ ক $\times$ (ক — অ) $=$ ক^২ — কঅ। অপর কখ $\times$ খজ $=$ কজ^২ অর্থাৎ ক^২ — কঅ $=$ অ^২; এই সমীকরণে অ $=$ ½ক$\sqrt{৫}$ — ½ক $=$ কজ এবং খজ $=$ ১½ক — ½ক$\sqrt{৫}$।

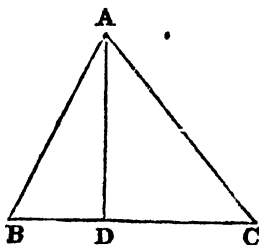
১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

অধিককোণি ত্রিভুজে যদি কোন লঘুকোণ হইতে সম্মুখস্থ বর্দ্ধিত বাহুর উপর লম্ব টানা যায় তবে অধিক কোণের সম্মুখস্থ বাহুর সমচতুর্ভুজ অধিক কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর সমচতুর্ভুজ হইতে, বৃদ্ধি পাইলে যে বাহুর উপর ঐ লম্ব পাত

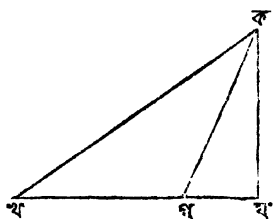
Let ABC be an obtuse angled triangle, having the obtuse angle ACB, and from the point A let AD be drawn (12. 1.) perpendicular to BC produced: The square of AB is greater than the squares of AC, CB, by twice the rectangle BC.CD.

Because the straight line BD is divided into two parts in the point C, $BD^2 = $ (4. 2.) $BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$; add AD^2 to both: Then $BD^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2 + 2BC.CD$. But $AB^2 = BD^2 + AD^2$ (47. 1.), and $AC^2 = CD^2 + AD^2$ (47. 1.); therefore, $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD$; that is, AB^2 is greater than $BC^2 + AC^2$ by $2BC.CD$. Therefore, "*in obtuse angled triangles,*" &c. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

In every triangle, the square of the side subtending any of the acute angles, is less than the squares of the sides containing that angle, by twice the rectangle contained by either of these sides, and the straight line intercepted between the perpendicular, let fall upon it from the opposite angle, and the acute angle.

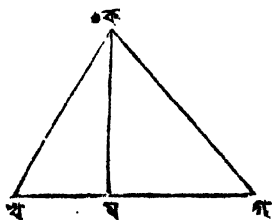
Let ABC be any triangle, and the angle at B one of its acute angles, and upon BC, one of the sides containing it, let fall the perpendicular (12. 1.) AD from the opposite angle: The square of AC, opposite to the angle B, is less than the squares of CB, BA by twice the rectangle CB.BD.

First, Let AD fall within the triangle ABC; and because the straight line CB is divided into two parts

হয় তাহার এবং লম্ব ও অধিক কোণের মধ্যস্থ সরল রেখার আয়তের দ্বিগুণ পরিমাণে অতিরিক্ত হইবে।

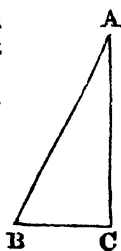
কখগ এক অধিক কোণি ত্রিভুজ তাহার মধ্যে কগখ অধিক কোণ। খগ বৃদ্ধি করিয়া ক বিন্দু হইতে তাহার উপর কঘ এক লম্ব টান। কখ সমচতুর্ভুজ খগ.গঘ আয়তের দ্বিগুণ পরিমাণে খগ ও কগ দুই রেখার দুই সমচতুর্ভুজ হইতে অতিরিক্ত হইবে।

খঘ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে একারণ (২। ৪) খঘ^2 = খগ^2 + গঘ^2 + ২খগ.গঘ। উভয়ে কঘ^2 যোগ কর তাহাতে খঘ^2 + কঘ^2 = খগ^2 + গঘ^2 + কঘ^2 + ২খগ.গঘ কিন্তু কখ^2 = খঘ^2 + কঘ^2 (১। ৪৭) এবং কগ^2 = গঘ^2 + কঘ^2 অতএব কখ^2 = খগ^2 + কগ^2 + ২খগ.গঘ অর্থাৎ কখ^2, ২খগ.গঘ পরিমাণে, খগ^2 + কগ^2 হইতে অতিরিক্ত। অতএব অধিককোণি ত্রিভুজে, ইত্যাদি।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রত্যেক ত্রিভুজে কোন লঘু কোণের সম্মুখস্থ বাহুর সমচতুর্ভুজ, ঐ কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, ঐ দুই বাহুর মধ্যে কোন বাহুর এবং সম্মুখস্থ কোণ হইতে তদুপরি পতিত লম্ব ও লঘু কোণের মধ্যস্থ সরল রেখার অন্তর্গত আয়তের দ্বিগুণ পরিমাণে লঘুতর হইবে।

কখগ এক ত্রিভুজ, খ লঘু কোণ, এই কোণের এক পার্শ্বস্থ খগ উপর সম্মুখস্থ কোণ হইতে কঘ লম্ব পাত কর, খ কোণের সম্মুখস্থ, কগ সম চতুর্ভুজ খগ ও কখ সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ২খগ.খঘ পরিমাণে লঘুতর হইবে।

in the point D (7. 2.) $BC^2 + BD^2 = 2BC.BD + CD^2$. Add to each AD^2; then $BC^2 + BD^2 + AD^2 = 2BC.BD + CD^2 + AD^2$. But $BD^2 + AD^2 = AB^2$, and $CD^2 + DA^2 = AC^2$ (47. 1.); therefore $BC^2 + AB^2 = 2BC.BD + AC^2$; that is, AC^2 is less than $BC^2 + AB^2$ by 2BC.BD.

Secondly, Let AD fall without the triangle ABC*: Then because the angle at D is a right angle, the angle ACB is greater (16. 1.) than a right angle, and $AB^2 =$ (12. 2.) $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$. Add BC^2 to each; then $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BC^2 + 2BC.CD$. But because BD is divided into two parts in C, $BC^2 + BC.CD =$ (3. 2.) BC.BD, and $2BC^2 + 2BC.CD = 2BC.BD$: therefore $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BC.BD$; or AC^2 is less than $AB^2 + BC^2$ by 2BD.BC.

Lastly, Let the side AC be perpendicular to BC; then is BC the straight line between the perpendicular and the acute angle at B: and it is manifest, that (47. 1.) $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2BC^2 = AC^2 + 2BC.BC$. Therefore, "*in every triangle*," &c. Q. E. D.

PROP. XIV. PROB.

To describe a square that shall be equal to a given rectilineal figure.

Let A be the given rectilineal figure; it is required to describe a square that shall be equal to A.

Describe (45. 1.) the rectangular parallelogram BCDE equal to the rectilineal figure A. If then, the sides of it, BE, ED, are equal to one another, it is a square, and what was required is done; but if they are not equal, produce one of them, BE to F, and make EF equal

* See figure of the last Proposition.

প্রথমতঃ কঘ যেন কখগ ত্রিভুজের মধ্যে পড়িতেছে। অতএব খগ সরল রেখা ঘ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে (২। ৭) $খগ^২ + খঘ^২ = ২খগ.খঘ + গঘ^২$। উভয় পক্ষে $কঘ^২$ যোগ কর তাহাতে $খগ^২ + খঘ^২ + কঘ^২ = ২খগ.খঘ + গঘ^২ + কঘ^২$। কিন্তু $খঘ^২ + কঘ^২ = কখ^২$ এবং $গঘ^২ + কঘ^২ = কগ^২$ (১। ৪৭), সুতরাং $খগ^২ + কখ^২ = ২খগ.খঘ + কগ^২$ অর্থাৎ $কগ^২$, $খগ^২ + কখ^২$ হইতে ২খগ.খঘ পরিমাণে লঘুতর হইতেছে।

দ্বিতীয়তঃ, কঘ যেন কখগ ত্রিভুজের বাহিরে পড়িতেছে *। তাহাতে ঘ কোণ সমকোণ এ কারণ (১। ১৬) কগখ কোণ সমকোণ হইতে অধিক, সুতরাং (২। ১২) $কখ^২ = কগ^২ + খগ^২ + ২খগ.গঘ$, উভয় পক্ষে $খগ^২$ যোগ কর তাহাতে $কখ^২ + খগ^২ = কগ^২ + ২খগ^২ + ২খগ.খঘ$। কিন্তু খঘ গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে (২। ৩) $খগ^২ + খগ.গঘ = খগ.খঘ$ এবং $২খগ^২ + ২খগ.গঘ = ২খগ.খঘ$ সুতরাং $কখ^২ + খগ^২ = কগ^২ + ২খগ.খঘ$, অর্থাৎ $কগ^২$, $কখ^২ + খগ^২$ হইতে ২খঘ.খগ পরিমাণে লঘুতর।

অবশেষে কগ যেন খগ উপর লম্বভাবে আছে তাহাতে খগ সরল রেখা কগ লম্ব এবং খ লঘু কোণের মধ্যে হইতেছে, সুতরাং স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে (১। ৪৭) $কখ^২ + খগ^২ = কগ^২ + ২খগ^২ = কগ^২ + ২খগ.খগ$। অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজে, ইত্যাদি।

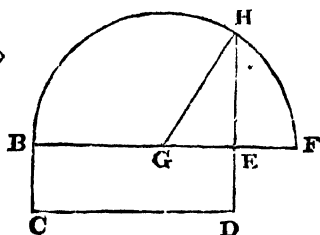
১৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

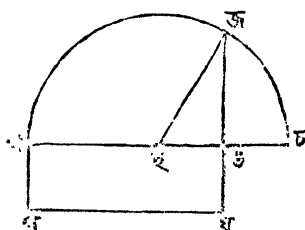
এক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ এক সমচতুর্ভুজ আঁকিতে হইবে।

ক নির্দ্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র। ক সমান এক সমচতুর্ভুজ আঁকিতে হইবে।

---

* পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞার ক্ষেত্রে দৃষ্টিকর।

to ED, and bisect BF in G: and from the centre G, at the distance GB, or GF, describe the semicircle BHF, and produce DE to H, and join GH. Therefore, because the straight line BF is divided into two equal parts in G, and into two unequal parts in E, the rectangle BE.EF, together with the square of EG, is equal (5. 2.) to the square of GF: but GF is equal to GH: therefore the rectangle BE. EF, together with the square of EG, is equal to the square of GH: But the squares of HE and EG are equal (47. 1.) to the square of GH: Therefore also the rectangle BE.EF, together with the square of EG, is equal to the squares of HE and EG. Take away the square of EG, which is common to both, and the remaining rectangle BE.EF, is equal to the square of EH. But BD is the rectangle contained by BE and EF, because EF is equal to ED; therefore BD is equal to the square of EH; and BD is also equal to the rectilineal figure A; therefore the rectilineal figure A is equal to the square of EH: Wherefore a square has been made equal to the given rectilineal figure A, viz. the square described upon EH. *Which was to be done.*

Sym. Dem. $BE.EF + GE^2 = BG^2$ (5. 2.) $= GH^2 = HE.^2 + GE.^2$ (47. 1.) $\therefore BE.EF = HE.^2$ But BE. EF = rect. ▭ BD = Fig A (by constr.) $\therefore HE^2 =$ Fig. A.

খগঘঙ সমকোণি সমানান্তরাল ক্ষেত্র ক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান অঙ্কিত কর। যদি ইহার খঙ ঙঘ বাহু পরস্পর সমান হয় তবে ইহাই সমচতুর্ভুজ এবং তবে যাহা অভীষ্ট তাহা হইল। যদি তাহারা সমান না হয় তবে তাহাদের মধ্যে একটীকে (খঙ) চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া ঙচ ঙঘ সমান কর এবং খচ ছ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর, এবং ছ কেন্দ্র হইতে ছখ দূরে খজচ অর্দ্ধ বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং ঘঙ জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া ছ জ

সংযুক্ত কর, অতএব খচ সরল রেখা ছ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ও ঙ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হওয়াতে খঙ.ঙচ আয়ত ঙছ সমচতুর্ভুজ সমেত চছ সমচতুর্ভুজ সমান (২। ৫), কিন্তু চছ ছজ সমান, সুতরাং খঙ.ঙচ আয়ত ঙছ সমচতুর্ভুজের সহিত একত্র ছজ সমচতুর্ভুজ সমান, অপর (১। ৪৭) জঙ ও ঙছ সমচতুর্ভুজ ছজ সমচতুর্ভুজ সমান, তন্নিমিত্তে খঙ.ঙচ আয়ত ঙছ সমচতুর্ভুজ সহিত একত্র জঙ ও ঙছ সমচতুর্ভুজের সমান। উভয় হইতে সামান্য ঙছ সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট খঙ.ঙচ আয়ত ঙজ সমচতুর্ভুজ সমান হইবে। কিন্তু খঙ ও ঙচ অন্তর্গত আয়ত খঘ, কেননা ঙচ ঙঘ সমান, সুতরাং খঘ ঙজ সমচতুর্ভুজের সমান, কিন্তু খঘ ক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান, তন্নিমিত্তে ক সরল রৈখিক ক্ষেত্র ঙজ সমচতুর্ভুজের সমান, অতএব ঙজ রেখার সমচতুর্ভুজ ক নির্দ্দিষ্ট ক্ষেত্রের সমান হইয়া স্থাপিত হইল, ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ.। খঙ.ঙচ $+$ ছঙ^২ $=$ খছ^২ (২। ৫) $=$ ছজ^২ $=$ জঙ^২ $+$ ছঙ^২ (১। ৪৭) $\therefore$ খঙ.ঙচ $=$ জঙ^২। অপর খঙ.ঙচ $=$ সমকোণি ▭ খঘ $=$ ক ক্ষেত্র (অঙ্ক পাত) $\therefore$ জঙ^২ $=$ ক ক্ষেত্র।

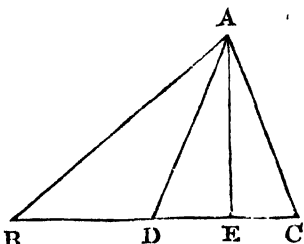
PROP. A. THEOR.

If one side of a triangle be bisected, the sum of the squares of the other two sides is double of the square of half the side bisected, and of the square of the line drawn from the point of bisection to the opposite angle of the triangle.

Let ABC be a triangle, of which the side BC is bisected in D, and DA drawn to the opposite angle: the squares of BA and AC are together double of the squares of BD and DA.

From A draw AE perpendicular to BC, and because BEA is a right angle, $AB^2 =$(47. 1.) $BE^2 + AE^2$ and $AC^2 = CE^2 + AE^2$: wherefore $AB^2 + AC^2 = BE^2 + CE^2 + 2AE^2$. But because the line BC is cut equally in D, and unequally in E, $BE^2 + CE^2 =$ (9. 2.) $2BD^2 + 2DE^2$: therefore $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + 2AE^2$.

A

B D E C

Now, $DE^2 + AE^2 =$ (47. 1.) AD^2, and $2DE^2 + 2AE^2 = 2AD^2$; wherefore $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$. Therefore, &c. Q. E. D.

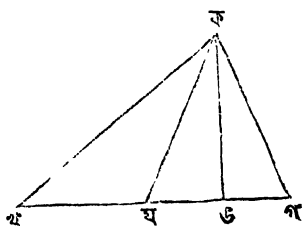
PROP. B. THEOR.

The sum of the squares of the diagonals of any parallelogram is equal to the sum of the squares of the sides of the parallelogram.

Let ABCD be a parallelogram, of which the diagonals are AC and BD; the sum of the squares of AC and BD is equal to the sum of the squares of AB, BC, CD, DA.

ক প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন ত্রিভুজের এক বাহু দ্বিখণ্ড হইলে অন্য দুই বাহুর সমচতুর্ভুজের যোগে, দ্বিখণ্ডিত বাহুর অর্দ্ধের সমচতুর্ভুজের এবং দ্বিখণ্ড চিহ্ন হইতে সম্মুখস্থ কোণ পর্য্যন্ত অঙ্কিত রেখার সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

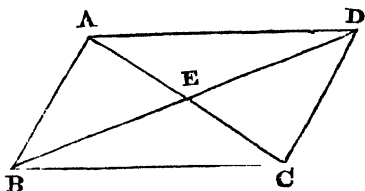
কখগ এক ত্রিভুজ, তাহার খগ বাহু ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইয়াছে, এবং ঘক সম্মুখস্থ কোণ পর্য্যন্ত টানা গিয়াছে। কখ এবং কগ দুএর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে খঘ ও কঘ দুএর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

ক হইতে খগ উপর কঙ লম্বভাবে টান। কঙখ সমকোণ হওয়াতে (১।৪৭) $কখ^{২} = খঙ^{২} + কঙ^{২}$ এবং $কগ^{২} = গঙ^{২} + কঙ^{২}$ সুতরাং $কখ^{২} + কগ^{২} = খঙ^{২} + গঙ^{২} + ২কঙ^{২}$। অপর খগ রেখা ঘ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ও ঙ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হওয়াতে (২। ৯) $খঙ^{২} + গঙ^{২} = ২খঘ^{২} + ২ঘঙ^{২}$ সুতরাং $কখ^{২} + কগ^{২} = ২খঘ^{২} + ২ঘঙ^{২} + ২কঙ^{২}$।

অপর $ঘঙ^{২} + কঙ^{২} + = কঘ^{২}$ এবং $২ঘঙ^{২} + ২কঙ^{২} = ২কঘ^{২}$ সুতরাং $কখ^{২} + কগ^{২} = ২খঘ^{২} + ২কঘ^{২}$। অতএব কোন ত্রিভুজের, ইত্যাদি।

খ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের দুই কর্ণের দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে ঐ সমানান্তরাল ক্ষেত্রের বাহু সমূহের সমচতুর্ভুজের যোগ সমান হইবে।

কখগঘ এক সমানান্তরাল ক্ষেত্র, কগ, খঘ ইহার দুই কর্ণ, কগ, খঘ এ দুএর সমচতুর্ভুজ কখ, খগ, গঘ, ঘক, এ সকলের সমচতুর্ভুজ সমান হইবে।

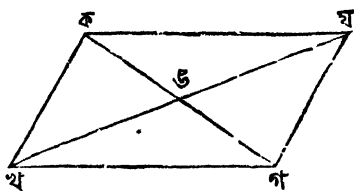
Let AC and BD intersect one another in E: and because the vertical angles AED, CEB are equal (15. 1.), and also the alternate angles EAD, ECB (29. 1.), the triangles ADE, ECB have two angles in the one equal to two angles in the other, each to each: but the sides AD and BC, which are opposite to equal angles, in these triangles are also equal (34. 1.); therefore the other sides which are opposite to the equal angles are also equal (26. 1.) viz. AE to EC, and ED to EB.

Since, therefore, BD is bisected in E, $AB^2 + AD^2$ = (A. 2) $2BE^2 + 2AE^2$; and for the same reason, $CD^2 + BC^2 = 2BE^2 + 2EC^2 = 2BE^2 + 2AE^2$, because EC=AE. Therefore $AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = 4BE^2 + 4AE^2$. But $4BE^2 = BD^2$; and $4AE^2 = AC^2$ (2. cor. 8. 2.) because BD and AC are both bisected in E; therefore $AB^2 + AD^2 + CD^2 + BC^2 = BD^2 + AC^2$. Therefore, "*the sum of the squares,*" &c. Q. E. D.

Cor. From this demonstration, it is manifest that *the diagonals of every parallelogram bisect one another.*

PROP. C. THEOR.

'*If a straight line be drawn from any point in the base 'of an isosceles triangle, or the base produced, to the 'opposite angle; the rectangle contained by the seg- 'ments between the point and the extremities of the 'base is equal to the difference between the square of 'the line drawn to the opposite angle, and the square 'of one of the equal sides.*

'Let ABC be an isosceles triangle, and let a straight 'line be drawn from any point D in the base, (fig. 1.)

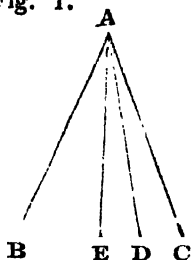
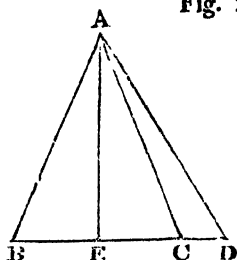
কগ ও খঘ ঙ বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করুক। কঙঘ ও গঙখ সম্মুখস্থ কোণ (১। ১৫) পরস্পর সমান, এবং ঙকঘ ও ঙগখ ভিন্ন২ পার্শ্বস্থ কোণও সমান (১। ২৯) একারণ কঘঙ ও ঙগখ ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই কোণ ক্রমশ অন্যের দুই কোণের সমান এবং কঘ ও খগ সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহুও পরস্পর সমান, অতএব সমান২ কোণের সম্মুখস্থ অবশিষ্ট বাহুও সমান (১। ২৬) অর্থাৎ কঙ ও ঙগ সমান এবং ঙঘ ও ঙখ সমান।

অপর খঘ ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইয়াছে একারণ কখ^{২} + কঘ^{২} = ২খঙ^{২} + ২কঙ^{২} (২। ক) ঐ কারণ গঘ^{২} + খগ^{২} = ২খঙ^{২} + ২ঙগ^{২} = ২খঙ^{২} + ২কঙ^{২} কেননা ঙগ = কঙ, সুতরাং কখ^{২} + কঘ^{২} + ঘগ^{২} + খগ^{২} = ৪খঙ^{২} + ৪কঙ^{২} কিন্তু ৪খঙ^{২} = খঘ^{২} এবং ৪কঙ^{২} = কগ^{২} (২। ৮. অনু.) কেননা খঘ ও কগ উভয়ে ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত, তন্নিমিত্তে কখ^{২} + কঘ^{২} + গঘ^{২} + খগ^{২} = খঘ^{২} + কগ^{২}। অতএব কোন সমানান্তরাল ক্ষেত্রের, ইত্যাদি।

অনুমান। এই উপপত্তিতে নিশ্চয় বোধ হইতেছে যে প্রত্যেক সমানান্তরাল ক্ষেত্রের দুই কর্ণ পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

গ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির কোন বিন্দু হইতে অথবা ভূমি বর্দ্ধিত হইলে তথা হইতে সম্মুখস্থ কোণ পর্য্যন্ত এক সরল রেখা যদি টানা যায় তবে ঐ বিন্দু হইতে ভূমির দুই প্রান্ত পর্য্যন্ত যে দুই রেখা খণ্ড থাকিবে তাহাদের অন্তর্গত আয়ত সম্মুখস্থ কোণ পর্য্যন্ত অঙ্কিত ঐ রেখা এবং এক সমান বাহু ইহাদের সমচতুর্ভুজের অন্তর তুল্য হইবে।

কখগ এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, ইহার ভূমির এক বিন্দু (১ ক্ষেত্রে দৃষ্টি কর) অথবা ভূমি বর্দ্ধিত হইলে তথা হইতে

'or in the base produced, (fig. 2.) to the opposite 'angle A; the rectangle BD.DC is equal to the difference between the squares of AD and AB.

'Bisect the base BC in E (10. 1.) and join EA; 'then, because BE is equal to CE, and EA common 'to the two triangles BEA, CEA, there are two sides 'in the one equal to two sides in the other, also the 'base BA is equal to the base CA, therefore the angle 'BEA is equal to the angle CEA (8. 1.), and each is a 'right angle (7. Def. 1.)

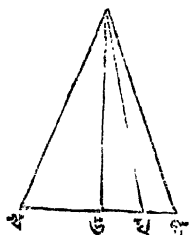
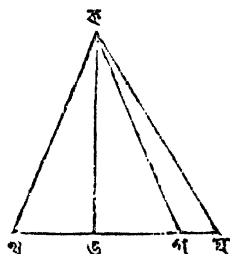
'And, *first*, Let D be between E, the middle of the 'base, and one of its extremities; then $BD.DC + DE^2 =$ (5. 2.) BE^2: and, adding AE^2 to these equals, '$BD.DC + DE^2 + EA^2 = BE^2 + EA^2$; but $DE^2 + EA^2 = DA^2$ (47. 1.) and $BE^2 + EA^2 = BA^2$; 'therefore $BD.DC + DA^2 = BA^2$, and hence, the 'rectangle BD.DC is equal to the excess of BA^2, 'above DA^2.

'*Secondly*. Let D be in BC produced, then $BD.DC + BE^2 = DE^2$ (6. 2.), and adding AE^2 to these 'equals, $BD.DC + BE^2 + EA^2 = DE^2 + EA^2$: but '$BE^2 + EA^2 = BA^2$ (47. 1.) and $DE^2 + EA^2 = DA^2$; therefore $BD.DC + BA^2 = DA^2$, and the 'rectangle BD.DC is the excess of DA^2 above BA^2.

'*Thirdly*, when the D is in the middle of the base, 'the truth of the proposition is manifest (47. 1.).'

(২ ক্ষেত্রে দৃষ্টি কর) অর্থাৎ ঘ বিন্দু হইতে সম্মুখস্থ ক কোণ পর্য্যন্ত এক সরল রেখা অঙ্কিত হউক। খঘ.গঘ আয়ত কঘ ও কখ এ দুএর সমচতুর্ভুজের অন্তর তুল্য।

১ ক্ষেত্র ২ ক্ষেত্র

খ ঙ ঘ গ খ ঙ গ ঘ

খগ ভূমি ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিয়া ক ঙ সংযুক্ত কর। খঙ গঙ সমান, এবং ঙক খঙক ও গঙক ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে একটীর দুই বাহু ক্রমশ অন্যের দুই বাহু সমান, এবং কখ ভূমিও গক সমান, অতএব খঙক কোণ গঙক কোণের সমান (১। ৮) আর ইহারা প্রত্যেকে সমকোণ (১। ৭ সংজ্ঞা)।

অপর প্রথমতঃ যেন ঘ বিন্দু ভূমির মধ্যস্থ ঙ এবং প্রান্তের মধ্যে আছে তাহাতে খঘ.গঘ + ঘঙ^{২} = খঙ^{২} (২। ৫) উভয় পক্ষে কঙ^{২} যোগ করিলে খঘ.গঘ + ঘঙ^{২} + কঙ^{২} খঙ^{২} + কঙ^{২}, কিন্তু ঘঙ^{২} + কঙ^{২} ঘক^{২} এবং খঙ^{২} + কঙ^{২} = কখ^{২} (১। ৪৭) সুতরাং খঘ.গঘ + ঘক^{২} = খক^{২}, অতএব খঘ.গঘ আয়ত কখ^{২} এবং কঘ^{২} ইহাদের অন্তর তুল্য।

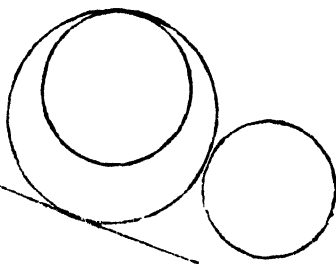
দ্বিতীয়তঃ যেন ঘ বিন্দু খগ ভূমি বর্দ্ধিত হইলে তাহাতে আছে। অতএব খঘ.গঘ + খঙ^{২} = ঘঙ^{২} (২। ৬) উভয় পক্ষে কঙ^{২} যোগ করিলে খঘ.গঘ + খঙ^{২} + কঙ^{২} = ঘঙ^{২} + কঙ^{২} কিন্তু খঙ^{২} + কঙ^{২} = কখ^{২} এবং ঘঙ^{২} + কঙ^{২} = ঘক^{২} (১। ৪৭) সুতরাং খঘ.গঘ + কখ^{২} = ঘক^{২}, এবং খঘ.গঘ আয়ত কঘ^{২} এবং কখ^{২} ইহাদের অন্তর তুল্য।

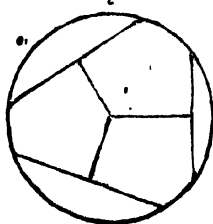
যদি ঘ বিন্দু ভূমির মধ্যভাগে থাকে তবে প্রতিজ্ঞাই স্পষ্ট দেখা যায়, উপপত্তির অপেক্ষা থাকে না, (১। ৪৭)।

BOOK III.*

DEFINITIONS.

A. The *radius* of a circle is the straight line drawn from the centre to the circumference.

I. A straight line is said to *touch* a circle, when it meets the circle, and being produced, does not cut it.

II. Circles are said to *touch* one another, which *meet*, but do not cut one another.

III. Straight lines are said to be *equally distant* from the centre of a circle, when the perpendiculars drawn to them from the centre are equal.

IV. And the straight line, on which the *greater* perpendicular falls, is said to be *farther* from the centre.

B. An *arch* of a circle is any part of the circumference.

---

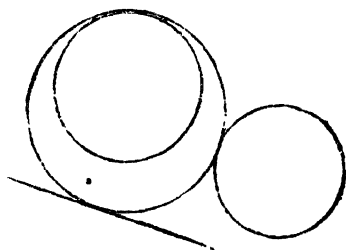
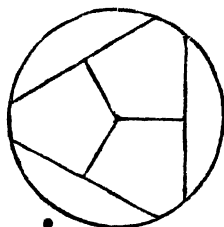
* ⊙ signifies a *circle*, —○ the *circumference*, ½⊙ or ⌓ *semicircle*.

৩ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

ক.। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত কোন সরল রেখা টানিলে তাহাকে কর্কট কহে।

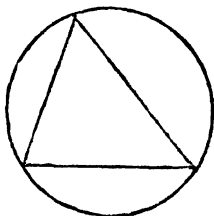
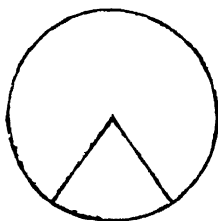
১। যদি কোন সরল রেখা বৃত্তেতে সংলগ্ন হইয়া বৃদ্ধি পাই-লেও বৃত্তকে ছেদ না করে তবে ঐ রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এমত কহা যায়।

২। যে২ বৃত্ত সংলগ্ন হইয়া পরস্পরকে ছেদ করে না তাহারা পরস্পর স্পর্শ করিতেছে এমত কহা যায়।

৩। যে২ রেখার উপর বৃত্তের কেন্দ্র হইতে লম্ব টানিলে লম্ব সমান২ হয় সেই২ রেখাকে কেন্দ্র হইতে সমদূর কহা যায়।

৪। আর যে রেখার উপর বৃহত্তর লম্ব পড়ে তাহাকে কেন্দ্র হইতে দূর তর কহা যায়।

খ। পরিধির কোন অংশের নাম চাপ।

⊙ এই চিহ্নের অর্থ বৃত্ত, ○ পরিধি, ½⊙ কিম্বা ◠ অর্দ্ধবৃত্ত।

V. A *segment* of a circle is the figure contained by a straight line, and the arch which it cuts off.

VI. An angle *in a segment* is the angle contained by two straight lines drawn from any point in the circumference of the segment, to the extremities of the straight line which is the base of the segment.

VII. And an angle is said to *insist* or *stand upon* the arch intercepted between the straight lines which contain the angle.

VIII. The *sector* of a circle is the figure contained by two straight lines drawn from the centre, and the arch of the circumference between them.

IX. *Similar segments* of a circle are those in which the angles are equal, or which contain equal angles.

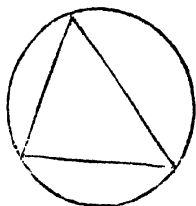
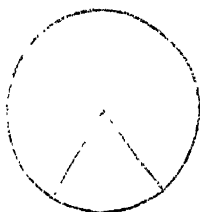
PROP. I. PROB.

To find the centre of a given circle.

Let ABC be the given circle; it is required to find its centre.

Draw within it any straight line AB, and bisect (10. 1.) it in D; from the point D draw (11. 1.) DC at

৫। কোন সরল রেখা এবং তদবচ্ছিন্ন চাপের মধ্যে যে ক্ষেত্র থাকে তাহাকে বৃত্তখণ্ড কহে।

৬। খণ্ডের পরিধির কোন বিন্দু হইতে খণ্ডের ভূমিরেখার প্রান্ত পর্য্যন্ত দুই সরল রেখা টানিলে তাহাদের মধ্যবর্ত্তি কোণকে খণ্ডস্থ কোণ কহে।

৭। এবং কোণের দুই পার্শ্বস্থ সরল রেখার মধ্যে যে চাপ থাকে ঐ কোণকে সে চাপের উপরিস্থ কহে।

৮। কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত দুই সরল রেখার এবং তন্মধ্যস্থ পরিধি চাপের অন্তর্গত ক্ষেত্রকে বৃত্তচ্ছেদক কহে।

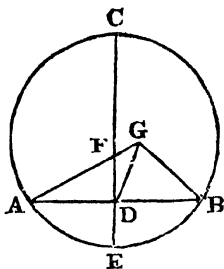
৯। যেং বৃত্তখণ্ডের কোণ পরস্পর সমান তাহাদিগকে সদৃশ খণ্ড কহে।

১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত, ইহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে। বৃত্ত মধ্যে কখ সরল রেখা টানিয়া ঘ বিন্দুতে তাহা দ্বিখণ্ড কর (১। ১০), এবং কখ উপর ঘ হইতে গঘ লম্বভাবে (১। ১১) টানিয়া ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর, এবং গঙ চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর। চ কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

right angles to AB, and produce it to E, and bisect CE in F: the point F is the centre of the circle ABC.

For, if it be not, let, if possible, G be the centre, and join GA, GD, GB: Then because DA is equal to DB, and DG, common to the two triangles ADG, BDG, the two sides AD, DG are equal to the two BD, DG, each to each; but the base GA is also equal to the base GB, because they are radii of the same circle: therefore the angle ADG is equal (8. 1.) to the angle GDB: But when a straight line, standing upon another straight line, makes the adjacent angles equal to one another, each of the angles is a right angle (7. Def. 1.) Therefore the angle GDB is a right angle: But FDB is likewise a right angle; wherefore the angle FDB is equal to the angle GDB the greater to the less, which is impossible. Therefore G is not the centre of the circle ABC: In the same manner, it can be shown, that no other point than F is the centre; that is F is the centre of the circle ABC. *Which was to be found.*

Cor. From this it is manifest, that *if in a circle a straight line bisect another at right angles, the centre of the circle is in the line which bisects the other.*

Sym. Dem. If F be not the centre, then suppose G to be the centre. AD = DB (by constr.) GD common to △s ADG, GDB and AG = GB (11 Def. I) ∴ ∠ADG = ∠GDB (8. 1.) ∴ ∠ADG is a rt. ∠ (7 Def. 1.) But ∠FDA is a rt. ∠ (by constr.) ∴ ∠ADG = ∠FDA which is impossible (9 Ax. 1.) ∴ G is not the centre, nor any other, but F.

PROP. II. THEOR.

If any two points be taken in the circumference of a circle, the straight line which joins them will fall within the circle.

কেননা যদি না হয় তবে বোধ কর ছ যেন কেন্দ্র। ছ ক, ছ ঘ, এবং ছ খ সংযুক্ত কর। কঘ খঘ সমান এবং ঘছ কঘছ ও খঘছ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, সুতরাং কঘ ঘছ দুই বাহু ক্রমশ খঘ ঘছ দুই বাহুর সমান, এবং ছক ভূমিও ছখ ভূমি সমান কেননা তাহারা উভয়ে এক বৃত্তের কর্কট রেখা, অতএব (১।৮) ছঘখ কোণ ছঘক কোণের সমান, অপর এক সরল রেখা অন্য রেখার উপর দাঁড়াইয়া সমীপস্থ দুই কোণকে সমান করিলে প্রত্যেক কোণ সমকোণ হয় (১।৭ সং.), সুতরাং ছঘখ এক সমকোণ, কিন্তু চঘখও সমকোণ তাহাতে চঘখ ও ছঘখ এ দুই কোণ সমান হয়, কিন্তু বৃহত্তর লঘুতরের সমান হইতে পারেনা অতএব ছ কখগ বৃত্তের কেন্দ্র নহে। ঐ রূপে চ ভিন্ন অন্য কোন বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র নহে ইহাও দর্শিত হইতে পারে, সুতরাং চ কখগ বৃত্তের কেন্দ্র, ইহাই এস্থলে নির্ণেয়।

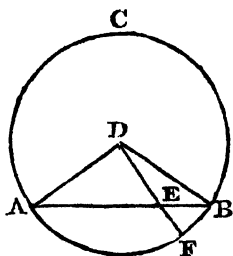
অনুমান। অতএব স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে বৃত্তের মধ্যে যদি এক সরল রেখা অন্য সরল রেখাকে লম্ব ভাবে দ্বিখণ্ড করে তবে ঐ দ্বিখণ্ড কারক রেখার মধ্যে কেন্দ্র থাকিবে।

সং উ.। চ যদি কেন্দ্র না হয় তবে ছ কেন্দ্র কল্পনা কর। কঘ = খঘ (অঙ্কপাত) ছঘ, কঘছ ও ছঘখ ত্রিভুজের সামান্য, এবং কছ = খছ (১। ১১ সং), ∴ ∠কঘছ = ∠ছঘখ (১।৮), ∴ ∠কঘছ এক সম∠(১।৭ সং), কিন্তু চঘক এক সম∠(অঙ্ক পাত) ∴ ∠কঘছ = ∠চঘক ইহা অসাধ্য (১।৯ স্বা. সা.) ∴ চ ভিন্ন অন্য কোন বিন্দু কেন্দ্র নহে।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের পরিধিতে দুই বিন্দুর নির্দ্দেশ করিলে তাহাদের সংযোজক সরল রেখা বৃত্তের মধ্যে পড়িবে।

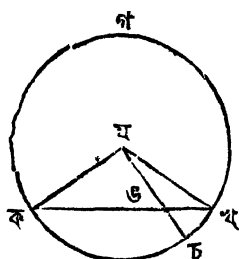
Let ABC be a circle, and A, B any two points in the circumference: the straight line drawn from A to B will fall within the circle.

Take any point in AB as E; find D, the centre of the circle ABC; join AD, DB and DE, and let DE meet the circumference in F. Then because DA is equal to DB, the angle DAB is equal (5. 1.) to the angle DBA; and because AE, a side of the triangle DAE, is produced to B, the angle DEB is greater (16. 1.) than the angle DAE; but DAE is equal to the angle DBE; therefore the angle DEB is greater than the angle DBE: Now to the greater angle the greater side is opposite (19. 1.); DB is therefore greater than DE: but DB is equal to DF; wherefore DF is greater than DE, and the point E is therefore within the circle. The same may be demonstrated of any other point between A and B, therefore AB is within the circle. Wherefore, "*if any two points,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. $\because$ AD = DB (11 Def. 1) $\angle$DAE = $\angle$DBE (5. 1.) $\angle$DEB $>$ $\angle$DAE (16. 1.) $\therefore$ $\angle$DEB $>$ $\angle$DBE $\therefore$ DB $>$ DE (19. 1.) But DB = DF (11 Def. 1.) $\therefore$ DF $>$ DE $\therefore$ AB is within the $\odot$.

PROP. III. THEOR.

If a straight line drawn through the centre of a circle bisect a straight line in the circle, which does not pass through the centre, it will cut that line at right angles; and, if it cut it at right angles, it will bisect it.

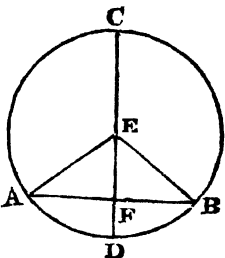
Let ABC be a circle, and let CD, a straight line drawn through the centre, bisect any straight line AB, which does not pass through the centre, in the point F: It also cuts it at right angles.

কখগ এক বৃত্ত এবং পরিধিস্থ দুই বিন্দু কখ। ক হইতে খ পর্য্যন্ত সরল রেখা টানিলে বৃত্তের মধ্যে পড়িবে।

কখ রেখার মধ্যে কোন বিন্দু লও যথা ঙ। কখগ বৃত্তের কেন্দ্র (৩। ১) নির্ণয় কর যথা ঘ, এবং কঘ ঘখ ঘঙ এই২ রেখা টান, ও ঘঙ চ বিন্দুতে পরিধিতে সংলগ্ন হউক। অপর কঘ ঘখ সমান হওয়াতে ঘকখ কোণ ঘখক কোণের সমান (১। ৫), এবং কঙ কঙঘ ত্রিভুজের এক পার্শ্ব হইয়া খ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাওয়াতে ঘঙখ কোণ ঘকঙ কোণ হইতে অধিক হইবে (১। ১৬), আর ঘকঙ ও ঘখঙ সমান একারণ ঘঙখ ঘখঙ অপেক্ষাও অধিক, সুতরাং ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখস্থ বাহুও বৃহত্তর হওয়াতে (১। ১৯) ঘখ বাহু ঘঙ হইতে বৃহত্তর। অপর ঘখ ও ঘচ সমান, সুতরাং ঘচ ঘঙ হইতে বৃহত্তর, তন্নিমিত্তে ঙ বিন্দু বৃত্তের মধ্যে আছে। কখ রেখার মধ্যে যে কোন বিন্দু লও তাহা বৃত্তের মধ্যস্থ ইহাও এই রূপে উপপন্ন হয় সুতরাং কখ বৃত্তের মধ্যে আছে। অতএব বৃত্তের পরিধিতে, ইত্যাদি।

সং উ.। ∵ কঘ = খঘ (১। ১১ সং), ∠ঘকঙ = ∠ঘখঙ (১। ৫) ; ∠ঘঙখ 7 ∠ঘকঙ (১। ১৬) ∴ ∠ঘঙখ 7 ∠ঘখঙ, ∴ খঘ 7 ঘঙ (১। ১৯) কিন্তু খঘ = ঘচ (১। ১১ সং) ∴ ঘচ 7 ঘঙ ∴ কখ ⊙ মধ্যে আছে।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

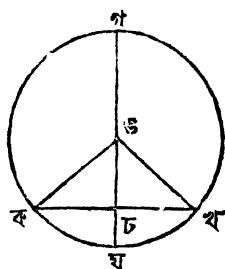
কোন সরল রেখা বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া আসিয়া, কেন্দ্র দিয়া না যায় এমত কোন বৃত্তস্থ সরল রেখাকে যদি দ্বিখণ্ড করে তবে লম্বভাবে দ্বিখণ্ড করিবে, এবং যদি লম্বভাবে ছেদ করে তবে দ্বিখণ্ড করিবে।

Take (1. 3.) E the centre of the circle, and join EA, EB. Then, because AF is equal to FB, and FE common to the two triangles AFE, BFE, there are two sides in the one equal to two sides in the other; but the base EA is equal to the base EB; therefore the angle AFE is equal (8. 1.) to the angle BFE. And when a straight line standing upon another makes the adjacent angles equal to another, each of them is a right (7. Def. 1.) angle: Therefore each of the angles AFE, BFE is a right angle; wherefore the straight line CD, drawn through the centre, bisecting AB, which does not pass through the centre, cuts AB at right angles.

Again, let CD cut AB at right angles; CD also bisects AB; that is, AF is equal to FB.

The same construction being made, because the radii EA, EB are equal to one another, the angle EAF is equal (5. 1.) to the angle EBF; and the right angle AFE is equal to the right angle BFE: Therefore, in the two triangles EAF, EBF, there are two angles in the one equal to two angles in the other; and the side EF, which is opposite to one of the equal angles in each, is common to both; therefore the other sides are equal (26. 1.); AF therefore is equal to FB. Wherefore, "*if a straight line,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. $\because$ AF = FB (by Hyp.), EF common to $\triangle$s AEF, EFB and AE = EB (11. Def. 1.) $\therefore$ $\angle$AFE = $\angle$EFB $\therefore$ CD is $\perp$ to AB (7. Def. 1.)

Again, $\angle$AFE = $\angle$EFB (10. Ax. 1.); $\angle$EAF = $\angle$EBF (5. 1.) $\because$ AE = EB (11. Def. 1.); and EF common to $\triangle$s AFE, EFB $\therefore$ (26. 1.) AF = FB.

কখগ এক বৃত্ত, এবং গঘ সরল রেখা কেন্দ্র দিয়া আসিয়া, কেন্দ্র দিয়া না যায় এমত কখ রেখাকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিতেছে। ইহা লম্বভাবেই দ্বিখণ্ড করিবে।

বৃত্তের কেন্দ্র ঙ নির্ণয় কর, ঙক ঙখ রেখা টান। তাহাতে কচ চখ সমান, ও ঙচ কঙচ ও খঙচ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু, সুতরাং একটীর দুই বাহু ক্রমশ অন্যটীর দুই বাহুর সমান, এবং ঙক ভূমিও ঙখ ভূমির সমান, সুতরাং (১। ৮) কচঙ কোণ খচঙ কোণের সমান। অপর এক সরলরেখা অন্য সরল রেখার উপর দাঁড়াইয়া সমীপস্থ কোণ সমান করিলে প্রত্যেকে সমকোণ হয় অতএব কচঙ ও খচঙ প্রত্যেকে সমকোণ, সুতরাং কেন্দ্রগত গঘ কেন্দ্র দিয়া না যায় এমত কখ রেখাকে দ্বিখণ্ড করত লম্বভাবে ছেদ করিতেছে।

পুনশ্চ গঘ যেন কখ উপর লম্বভাবে পড়িতেছে। তাহাতে গঘ কখ রেখাকে দ্বিখণ্ড করিবে অর্থাৎ কচ চখ সমান।

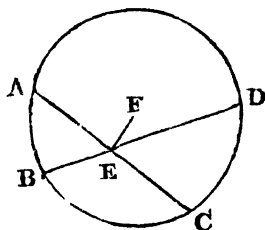
পূর্ব্ববৎ ক্ষেত্রের অঙ্কপাত হইলে ঙক ও ঙখ দুই কর্কট রেখা সমান হওয়াতে ঙকচ কোণ ঙখচ সমান (১। ৫), এবং কচঙ ও খচঙ সমকোণ হওয়াতে পরস্পর সমান, সুতরাং ঙকচ ও ঙখচ দুই ত্রিভুজে একটীর দুই কোণ ক্রমশ অন্যটীর দুই কোণের সমান এবং সমান২ কোণের সম্মুখস্থ বাহু ঙচ উভয় ত্রিভুজের সামান্য, সুতরাং অন্যান্য বাহুও সমান (১। ২৬), অতএব কচ খচ সমান। এই রূপে কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

সং উ.। ∴ কচ = খচ (কল্পনা), ঙচ, কঙচ ও ঙচখ ত্রিভুজের সামান্য, এবং কঙ = ঙখ (১। ১১) ∴ ∠কচঙ = ∠ঙচখ ∴ গঘ, কখ উপর ⊥ (১। ৭ সং)। পুনশ্চ ∠কচঙ = ∠ঙচখ (১। ১০ স্ব. সা.), ∠ঙকচ = ∠ঙখচ (১। ৫) ∵ কঙ = খঙ (১। ১১ সং), এবং ঙচ, কচঙ ও ঙচখ ত্রিভুজের সামান্য ∴ (১। ২৬) কচ = চখ।

PROP. IV. THEOR.

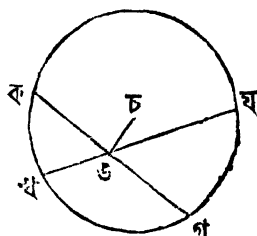
If, in a circle, two straight lines cut one another, in a point which is not the centre, they cannot bisect each other.

Let ABCD be a circle, and AC, BD two straight lines in it, which cut one another in a point E, which is not the centre: AC, BD do not bisect one another.

For, if possible, let AE be equal to EC, and BE to ED: If one of the lines pass through the centre, it is plain that it cannot be bisected by the other, which does not pass through the centre. But if neither of them pass through the centre, take (1. 3.) F the centre of the circle, and join EF: and because FE, a straight line through the centre, bisects another AC, which does not pass through the centre, it must cut it at right (3. 3.) angles; wherefore FEA is a right angle. Again, because the straight line FE bisects the straight line BD, which does not pass through the centre, it must cut it at right (3. 3.) angles; wherefore FEB is a right angle: and FEA was shown to be a right angle; therefore FEA is equal to the angle FEB, the less to the greater, which is impossible; therefore AC, BD do not bisect one another. Wherefore, "*if in a circle*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If AC, BD bisect each other then FEA is a rt.∠(3. 3.) So also FEB is a rt.∠(3. 3) ∴ ∠EFA = ∠FEB (10. Ax. 1. which is impossible (9. Ax. 1.) ∴ AC and BD do not bisect one another.

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের মধ্যে যদি দুই সরল রেখা পরস্পরকে কেন্দ্র ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ করে তবে তাহারা পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিতে পারে না।

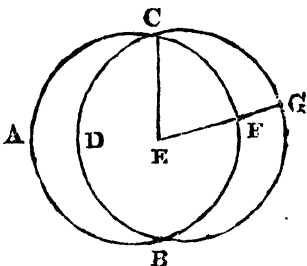
কখগঘ এক বৃত্ত এবং কগ খঘ তন্মধ্যস্থ দুই সরল রেখা কেন্দ্র ভিন্ন চ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতেছে। কগ ও খঘ পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে না।

যদিস্যাৎ সাধ্য হয় তবে কঙ ঙগ সমান ও খঙ ঙঘ সমান হউক। যদি ঐ দুই রেখার কোনটী কেন্দ্র দিয়া যায় তবে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে তাহা অন্য রেখাতে দ্বিখণ্ডিত হইতে পারেনা কেননা সে কেন্দ্র দিয়া যায় না, আর যদি কোনটী কেন্দ্র দিয়া না যায় তবে চ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া (৩। ১) চ ঙ সংযুক্ত কর। অপর ঙচ কেন্দ্র দিয়া আসিয়া কেন্দ্র দিয়া না যায় এমত কগ রেখাকে দ্বিখণ্ড করাতে (৩। ৩) তাহাকে লম্বভাবে ছেদ করিবে, সুতরাং চঙক এক সমকোণ। এবং ঙচ সরল রেখা কেন্দ্র দিয়া না যায় এমত খঘ রেখাকে দ্বিখণ্ড করাতে তাহাকেও লম্ব ভাবে ছেদ করিবে, সুতরাং চঙখ এক সমকোণ। আর চঙক ও সমকোণ হওয়াতে চঙক ও চঙখ পরস্পর সমান কিন্তু লঘুতর বৃহত্তরের সমান হইতে পারে না সুতরাং কগ খঘ পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে না। অতএব বৃত্তের মধ্যে, ইত্যাদি।

সং উ.। কগ খঘ যদি পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে তবে চঙক এক সম ∠ (৩।৩) তদ্রূপ চঙখ ও সম ∠ (৩। ৩) ∴ ∠চঙক = ∠চঙখ (১। ১০ স্ব. সা.) ইহা অসাধ্য (১। ৯ স্ব. সা.) ∴ কগ খঘ পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে না।

PROP. V. THEOR.

If two circles cut one another, they cannot have the same centre.

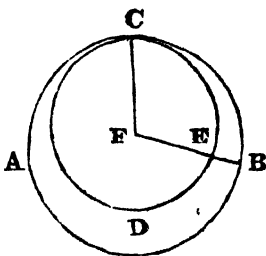
Let the two circles ABC, CDG cut one another in the points B, C; they have not the same centre.

For, if it be possible, let E be their centre; join EC, and draw any straight line EFG meeting the circles in F and G; and because E is the centre of the circle ABC, CE is equal to EF: Again, because E is the centre of the circle CDG, CE is equal to EG: but, CE was shown to be equal to EF, therefore EF is equal to EG, the less to the greater, which is impossible: therefore E is not the centre of the circles ABC, CDG. Wherefore, "*if two circles,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If possible let E be the centre of both ⊙s ∴ CE = EF (11. Def. 1.) and also to EG ∴ EF = FG which is impossible (9. Ax. 1,) ∴ E is not the centre of both.

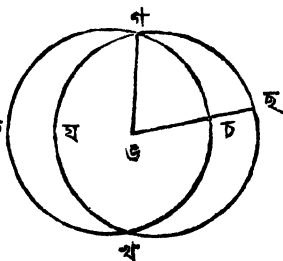
PROP. VI. THEOR.

If two circles touch one another internally, they cannot have the same centre.

Let the two circles ABC, CDE, touch one another internally in the point C; they have not the same centre.

For, if they have, let it be F; join FC, and draw any straight line FEB meeting the circles in E and B; and because F is the centre of the circle ACB, CF is equal to FB;

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

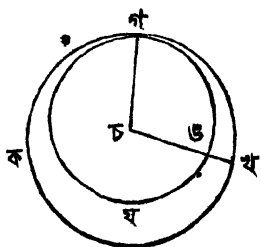
দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছিন্ন করিলে উভয়ের কেন্দ্র এক হইতে পারে না।

কখগ ও গঘছ দুই বৃত্ত গ ও খ বিন্দুতে পরস্পরকে ছিন্ন করুক। উভয়ের কেন্দ্র এক হইবে না।

যদিস্যাৎ হইতে পারে তবে ঙ উভয়ের কেন্দ্র হউক। ঙ গ সংযুক্ত কর এবং উভয় বৃত্তের উপর চ ও ছ বিন্দুতে পড়ে এমত কোন সরল রেখা ঙচছ টান। অপর কখগ বৃত্তের কেন্দ্র ঙ হওয়াতে ঙগ ও ঙচ পরস্পর সমান এবং গঘছ বৃত্তের কেন্দ্র ঙ হওয়াতে ঙগ ও ঙছ পরস্পর সমান। আর ঙগ ঙচ সমান উপপন্ন হইয়াছে, সুতরাং ঙচ ও ঙছ পরস্পর সমান। কিন্তু লঘুতর বৃহত্তরের সমান হইতে পারে না, অতএব ঙ কখগ ও গঘছ উভয় বৃত্তের কেন্দ্র নহে। এই রূপে দুই বৃত্ত, ইত্যাদি।

সং উ.। যদি সাধ্য হয় তবে ঙ উভয়ের কেন্দ্র কল্পনা কর ∴ গঙ = ঙচ (১। ১১ সং) এবং ঙছ = গঙ ∴ ঙচ = ঙছ ইহা অসাধ্য (১। ৯ স্বী. সা.) ∴ চ উভয় ⊙ কেন্দ্র নহে।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই বৃত্ত পরস্পরকে অন্তরে স্পর্শ করিলে উভয়ের কেন্দ্র এক হইতে পারে না।

কখগ ও গঘঙ দুই বৃত্ত গ বিন্দুতে পরস্পরকে অন্তরে স্পর্শ করুক। তাহাদের উভয়ের কেন্দ্র এক হইবে না।

কেননা যদিস্যাৎ হইতে পারে তবে চ উভয়ের কেন্দ্র হউক। চ

also, because F is the centre of the circle CDE, CF is equal to FE : but CF was shown to be equal to FB; therefore FE is equal to FB, the less to the greater, which is impossible; wherefore F is not the centre of the circles ABC, CDE. Therefore, "*if two circles,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If possible, let F be the centre of both ⊙s ∴ CF = FE (11. Def. 1.) and also to FB ∴ FE = FB which is impossible (9. Ax. 1.) ∴ F is not the centre of both ⊙s.

PROP. VII. THEOR.

If any point be taken in the diameter of a circle, which is not the centre, of all the straight lines which can be drawn from it to the circumference, the greatest is that in which the centre is, and the other part of that diameter is the least; and, of any others, that which is nearer to the line passing through the centre is always greater than one more remote from it: And from the same point there can be drawn only two straight lines that are equal to one another, one upon each side of the shortest line.

Let ABCD be a circle, and AD its diameter, in which let any point F be taken which is not the centre: let the centre be E; of all the straight lines FB, FC, FG, &c. that can be drawn from F to the circumference, FA is the greatest and FD, the other part of the diameter AD, is the least: and of the others, FB is greater than FC, and FC than FG.

Join BE, CE, GE; and because two sides of a triangle are greater (20. 1.) than the third, BE, EF are greater than BF; but AE is equal to EB; therefore AE and EF, that is, AF is greater than BF; again, because BE is equal to CE, and FE com-

গ সংযুক্ত কর এবং ঙ ও খ বিন্দুতে উভয় বৃত্তের উপর পড়ে এগত কোন সরল রেখা চঙখ টান। কখগ বৃত্তের কেন্দ্র চ হওয়াতে চগ চখ সমান, এবং গঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র চ হওয়াতে চগ চঙ সমান, আর চগ চখ সমান হওয়াতে চঙ চখ সমান, কিন্তু লঘুতর বৃহত্তরের সমান হইতে পারে না, সুতরাং চ কখগ ও গঘঙ উভয় বৃত্তের কেন্দ্র নহে। অতএব দুই বৃত্ত, ইত্যাদি।

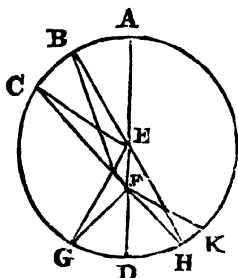
সং উ.। যদি সাধ্য হয় তবে চ উভয়ের কেন্দ্র হউক। গচ = ঙচ (১। ১১ সং) এবং খচ = গচ ∴ ঙচ = খচ ইহা অসাধ্য (১। ৯ স্ব. সা.) ∴ চ উভয় ⊙ কেন্দ্র নহে।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

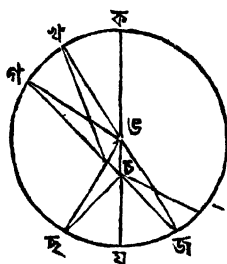
বৃত্তের ব্যাসেতে কেন্দ্র ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুর নির্দ্দেশ করিলে তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যত সরল রেখা টানা যায় তাহাদের সর্ব্বাপেক্ষা যাহাতে কেন্দ্র আছে সেই রেখা বৃহত্তম হইবে, এবং ঐ ব্যাসের অন্য অংশ সর্ব্বাপেক্ষা লঘুতম হইবে, আর অন্যান্য রেখার মধ্যে যাহাতে কেন্দ্র আছে তাহার নিকটতর রেখা সর্ব্বদা দূরতর হইতে বৃহৎ হইবে, আর ঐ এক বিন্দু হইতে লঘুতম রেখার প্রত্যেক পার্শ্বে একটী করিয়া কেবল দুই সরল রেখা পরস্পর সমান হইয়া অঙ্কিত হইতে পারে।

কখগঘ এক বৃত্ত, তাহার কঘ ব্যাসে কেন্দ্র ভিন্ন অন্য এক বিন্দু চ লওয়া যাউক, এবং ঙ কেন্দ্র হউক। চখ, চগ, চছ ইত্যাদি যত সরল রেখা চ হইতে পরিধি পর্য্যন্ত টানা যায় তাহাদের মধ্যে চক বৃহত্তম হইবে, এবং কঘ ব্যাসের অন্যাংশ চঘ লঘুতম হইবে, আর অন্যান্য রেখার মধ্যে চখ চগ হইতে বৃহত্তর এবং চগ চছ হইতে বৃহত্তর হইবে।

খঙ, গঙ, ছঙ, রেখা টান। অপর (১। ২০) ত্রিভুজের দুই বাহু তৃতীয় বাহু হইতে বৃহত্তর হওয়াতে খঙ ঙচ একত্র খচ হইতে বৃহত্তর, আর কঙ ঙখ সমান হওয়াতে কঙ ও ঙচ যোগ অর্থাৎ

mon to the triangles BEF, CEF, the two sides BE, EF are equal to the two CE, EF; but the angle BEF is greater than the angle CEF; therefore the base BF is greater (24. 1.) than the base FC; for the same reason, CF is greater than GF. Again, because GF, FE are greater (20. 1.) than EG, and EG is equal to ED; GF, FE are greater than ED, take away the common part FE, and the remainder GF is greater than the remainder FD, therefore FA is the greatest, and FD the least of all the straight lines from F to the circumference; and BF is greater than CF, and CF than GF.

Also, there can be drawn only two equal straight lines from the point F to the circumference, one upon each side of the shortest line FD: at the point E in the straight line EF, make (23. 1.) the angle FEH equal to the angle GEF, and join FH: Then because GE is equal to EH, and EF common to the two triangles GEF, HEF; the two sides GE, EF are equal to the two HE, EF; and the angle GEF is equal to the angle HEF; therefore the base FG is equal (4. 1.) to the base FH: but besides FH, no straight line can be drawn from F to the circumference equal to FG; for, if there can, let it be FK; and because FK is equal to FG, and FG to FH, FK is equal to FH; that is, a line nearer to that which passes through the centre, is equal to one more remote, which is impossible. Therefore, "*if any point be taken,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. BE $=$ AE $\therefore$ BE $+$ EF $=$ AE $+$ EF $=$ AF; BE $+$ EF $>$ BF (20. 1.) $\therefore$ AF $>$ BF Again BE $=$ CE, EF common to $\triangle$s BEF, CEF but $\angle$BEF $>$ $\angle$CEF $\therefore$ (24. 1.) BF $>$ CF. Similarly CF

কচ, খচ হইতে বৃহত্তর। এবং খঙ গঙ সমান, এবং ঙচ খঙচ ও গঙচ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, আর খঙচ কোণ গঙচ হইতে অধিক হওয়াতে (১। ২৪) খচ ভূমি গচ ভূমি হইতে বৃহত্তর হইবে। ঐ কারণে গচ চছ হইতে বৃহত্তর। অপর চছ ও চঙ একত্র ঙছ হইতে বৃহত্তর (১। ২০), এবং ঙছ ঙঘ সমান, একারণ চছ ও ঙচ একত্র ঙঘ হইতে বৃহত্তর সুতরাং সামান্য অংশ ঙচ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট চছ চঘ হইতে বৃহত্তর হইবে। অতএব চ হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যাবদীয় রেখার মধ্যে কচ বৃহত্তম ও চঘ লঘুতম এবং খচ, গচ হইতে, ও গচ, চছ হইতে বৃহত্তর।

পুনশ্চ চ বিন্দু হইতে চঘ লঘুতম রেখার প্রত্যেক পার্শ্বে একটী করিয়া কেবল দুই সরল রেখা পরস্পর সমান হইয়া অঙ্কিত হইতে পারে। ঙচ রেখার ঙ চিহ্নেতে চঙজ, কোণ ছঙচ সমান করিয়া (১। ২৩) আঁকিয়া চ জ সংযুক্ত কর। অতএব ছঙ ঙজ সমান, এবং ঙচ ছঙচ ও জঙচ উভয় ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে ছঙ ঙচ দুই বাহু জঙ ঙচ দুএর সমান, এবং ছঙচ কোণ জঙচ কোণের তুল্য, সুতরাং (১। ৪) চছ ভূমি চজ ভূমির সমান। অপর চজ ভিন্ন অন্য কোন রেখা চ হইতে পরিধি পর্য্যন্ত চছ সমান টানা যায় না, যদি বল টানা যায় তবে চট তৎসমান হউক, তাহাতে চট চছ সমান, এবং চছ চজ সমান হওয়াতে চট চজ সমান হইবে, কিন্তু পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে কেন্দ্রগত রেখার নিকটতর রেখা দূরতরের সমান হইতে পারে না সুতরাং চট চছ সমান নহে। অতএব, বৃত্তের ব্যাসেতে ইত্যাদি।

সং উ.। খঙ = কঙ ∴ খঙ + ঙচ = কঙ + ঙচ = কচ। খঙ + ঙচ 7 খচ (১। ২০) ∴ কচ 7 খচ। অপর খঙ = গঙ, ও ঙচ, খঙচ ও গঙচ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, এবং

$>$ GF. Moreover, GF + FE $>$ GE (20. 1.) ∴ GF + FE $>$ ED or EF + FD ∴ GF $>$ FD.

Again ∵ GE = EH and EF common to △s GEF, HEF and ∠GEF = ∠FEH (by constr.) ∴ GF = FH (4. 1.) No other line can be = GF. If possible let FK = GF ∴ FK = FH. This is impossible from the above demonstration.

PROP. VIII. THEOR.

If any point be taken without a circle, and straight lines be drawn from it to the circumference, whereof one passes through the centre; of those which fall upon the concave circumference the greatest is that which passes through the centre; and of the rest, that which is nearer to that through the centre is always greater than the more remote: But of those which fall upon the convex circumference, the least is that between the point without the circle, and the diameter; and of the rest, that which is nearer to the least is always less than the more remote: And only two equal straight lines can be drawn from the point unto the circumference, one upon each side of the least.

Let ABC be a circle, and D any point without it, from which let the straight lines DA, DE, DF, DC be drawn to the circumference, whereof DA passes through the centre. Of those which fall upon the concave part of the circumference AEFC, the greatest is AD, which passes through the centre; and the line nearer to AD is always greater than the more remote, viz. DE than DF, and DF than DC: but of those which fall upon the convex circumference HLKG, the least is DG, between the point D and the diameter AG; and the nearer to it is always less than the more, remote, viz. DK than DL, and DL than DH.

Take (1. 3.) M the centre of the circle ABC, and join ME, MF, MC, MK, ML, MH: And because AM

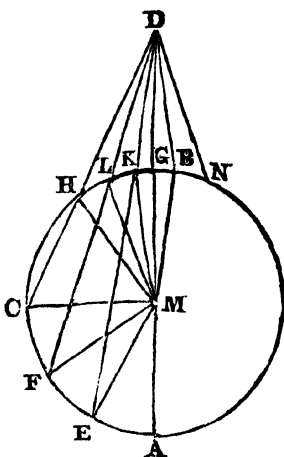
∠খঙচ 7 ∠গঙচ ∴ (১। ২৪) খচ 7 গচ। ঐ রূপে গচ 7 চছ। পুনশ্চ চছ + ঙচ 7 ছঙ (১। ২০) ∴ চছ + ঙচ 7 ঘঙ অর্থাৎ ঙচ + চঘ ∴ চছ 7 চঘ। আর ছঙ = ঙজ, এবং ঙচ, ছঙচ ও জঙচ ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং ∠ছঙচ = ∠চঙজ (অঙ্ক পাত) ∴ চছ = চজ (১। ৪), আর অন্য কোন রেখা = চছ নহে, যদি সাধ্য হয় তবে চট = চছ হউক ∴ চট = চজ, কিন্তু ইহা পূর্ব্বোক্ত উপপত্তিতে অসাধ্য।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের বাহিরে কোন বিন্দুর নির্দ্দেশ করিয়া তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত কএক সরল রেখা টানিলে, এবং তাহাদের একটী কেন্দ্র দিয়া গেলে, যে২ রেখা পরিধির অন্তর্দ্দিকে পড়িবে তাহার মধ্যে ঐ কেন্দ্রগত রেখা সর্ব্বাপেক্ষা বৃহত্তম, এবং অন্যান্যের মধ্যে কেন্দ্রগতের নিকটতর রেখা সর্ব্বত্র দূরতর হইতে বৃহৎ; কিন্তু যে২ রেখা পরিধির বহির্দ্দিকে পড়ে তাহার মধ্যে ঐ বহিস্থবিন্দুর এবং ব্যাসের মধ্যস্থ রেখা সর্ব্বাপেক্ষা লঘুতম, এবং অন্যান্য রেখার মধ্যে এই লঘুতমের নিকটতর রেখা দূরতর হইতে ন্যূন; আর ঐ বিন্দু হইতে লঘুতমের প্রত্যেক পার্শ্বে একটী করিয়া কেবল দুই সরল রেখা পরস্পর সমান করিয়া টানা যাইতে পারে।

কখগ এক বৃত্ত, ঘ ইহার বহিস্থ চিহ্ন, তথা হইতে ঘক, ঘঙ, ঘচ, ঘগ, এই২ রেখা পরিধি পর্য্যন্ত টান, তাহার মধ্যে ঘক কেন্দ্র দিয়া যাউক। কঙচগ পরিধির অন্তর্দ্দিকে যে২ রেখা পড়ে তাহার মধ্যে কেন্দ্রগত কঘ বৃহত্তম, এবং কঘ রেখার নিকটতর রেখা সর্ব্বত্র দূরতর হইতে বৃহৎ অর্থাৎ ঘঙ, ঘচ হইতে এবং ঘচ, ঘগ হইতে বৃহৎ; কিন্তু জঠটছ পরিধির বহির্দ্দিকে যে২ রেখা পড়ে তাহাদের মধ্যে ঘ বিন্দু ও কছ ব্যাসের মধ্যস্থ ঘছ লঘুতম, আর ইহার নিকটতর রেখা সর্ব্বত্র দূরতর হইতে লঘু অর্থাৎ ঘট, ঘঠ হইতে, এবং ঘঠ, ঘজ হইতে লঘু।

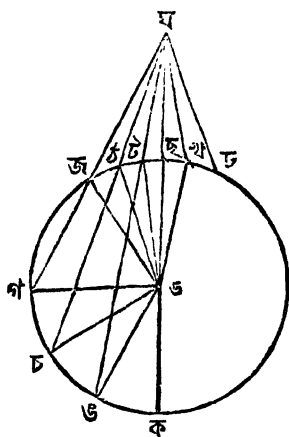
কখগ বৃত্তের কেন্দ্র ড নির্ণয় (৩। ১) করিয়া ডঙ, ডচ, ডগ,

is equal to ME, if MD be added to each, AD is equal to EM and MD; but EM and MD are greater (20. 1.) than ED; therefore also AD is greater than ED. Again, because ME is equal to MF, and MD common to the triangles EMD, FMD; EM, MD are equal to FM, MD; but the angle EMD is greater than the angle FMD; therefore the base ED is greater (24. 1.) than the base FD. In like manner, it may be shown that FD is greater than CD. Therefore DA is the greatest; and DE greater than DF, and DF than DC.

And because MK, KD are greater (20. 1.) than MD, and MK is equal to MG, the remainder KD is greater than the remainder GD. that is GD is less than KD: And because MK, DK are drawn to the point K within the triangle MLD from M, D, the extremities of its side MD; MK KD are less (21. 1.) than ML, LD; whereof MK is equal to ML; therefore the remainder DK is less than the remainder DL: In like manner, it may be shown, that DL is less than DH: Therefore DG is the least, and DK less than DL, and DL than DH.

Also, there can be drawn only two equal straight lines from the point D to the circumference, one upon each side of the least: at the point M, in the straight line MD, make the angle DMB equal to the angle DMK; and join DB; and because in the triangles KMD, BMD, the side KM, is equal to the side BM, and MD common to both, and also the angle KMD equal to the angle BMD, the base DK is equal (4. 1.) to

ডজ, ডঠ, এই২ রেখা টান। অপর কড ডঙ সমান, তাহাদের প্রত্যেকে ডঘ যোগ করিলে কঘ, ঙড ও ডঘ দুএর তুল্য হইবে, পরন্তু ঙড ও ডঘ একত্র ঙঘ হইতে বৃহৎ (১। ২০) সুতরাং কঘ ঙঘ হইতে বৃহত্তর। পুনশ্চ, ডঙ ডচ সমান ও ডঘ ঙডঘ ও চডঘ ত্রিভুজের সামান্য বাহু হওয়াতে ঙড ও ডঘ ক্রমশ ডচ ও ডঘ সমান, কিন্তু ঙডঘ কোণ চডঘ হইতে অধিক, সুতরাং ঙঘ ভূমি চঘ ভূমি হইতে বৃহত্তর (১। ২৪), এবং ঐ রূপে ইহাও উপপন্ন হইতে পারে যে চঘ গঘ হইতে বৃহত্তর। অতএব কঘ সর্ব্বাপেক্ষা বৃহত্তম, ও ঘঙ, ঘচ হইতে, ও ঘচ, ঘগ হইতে বৃহত্তর।

অপর ডট টঘ একত্র ডঘ হইতে বৃহত্তর (১। ২৪), এবং ডট ডছ সমান, অতএব সমান২ অংশ বিয়োগে অবশিষ্ট টঘ, ছঘ হইতে বৃহত্তর, অর্থাৎ ছঘ, টঘ হইতে ন্যূন। এবং ডঠঘ ত্রিভুজের মধ্যে ডঘ বাহুর দুই প্রান্ত ড ও ঘ হইতে ট বিন্দু পর্য্যন্ত ডট ঘট টানা গিয়াছে এনিমিত্তে (১। ২১) ডট ও টঘ একত্র ডঠ ও ঠঘ হইতে ন্যূন, ইহার মধ্যে ডট ডঠ সমান, সুতরাং অবশিষ্ট ঘট অবশিষ্ট ঘঠ হইতে ন্যূন। এইরূপে ইহাও উপপন্ন হইবে যে ঘঠ ঘজ হইতে ন্যূন। অতএব ঘছ সর্ব্ব লঘুতম এবং ঘট, ঘঠ হইতে, ও ঘঠ, ঘজ হইতে লঘু।

পুনশ্চ, ঘ বিন্দু হইতে ঘছ লঘুতম রেখার প্রত্যেক পার্শ্বে একটী করিয়া পরিধি পর্য্যন্ত কেবল দুই সরল রেখা পরস্পর সমান হইয়া অঙ্কিত হইতে পারে। ডঘ সরল রেখার ড বিন্দুতে ঘডখ কোণ ঘডট কোণের সমান করিয়া ঘ খ সংযুক্ত কর। টডঘ ও খডঘ দুই ত্রিভুজে টড বাহু খড বাহুর সমান, ও

the base DB. But, besides DB, no straight line can be drawn from D to the circumference, equal to DK: for, if there can, let it be DN: then because DN is equal to DK, and DK equal to DB, DB is equal to DN; that is, the line nearer to DG, the least, equal to the more remote, which has been shown to be impossible. "*If*," therefore, "*any point*," &c. Q. E. D.

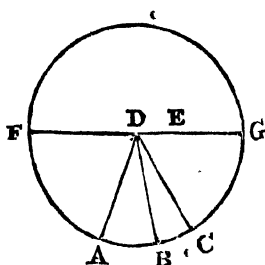
Sym. Dem. $EM = AM \therefore EM + MD = AM + MD = AD$; $EM + MD > ED$ (20. 1.) $\therefore AD > ED$. Again $EM = FM$, and MD common to $\triangle$s EMD, FMD, but $\angle EMD > \angle FMD \therefore$ (24. 1.) $ED > FD$. Similarly $FD > CD$. Moreover $MK + KD > MD$ or $MG + GD$ (20. 1.) and $MK = MG \therefore KD > GD$ or $GD < KD$. Also $MK + KD < ML + LD$ (21. 1.) and $MK = ML \therefore KD < LD$. Similarly $LD < HD$.

Again $MK = MB$ and DM common to $\triangle$s KDM, BDM, and $\angle DMK = \angle DMB$ (by constr.) $\therefore KD = BD$ (4. 1.) No other line can be $= KD$; if possible let $DN = KD \because DN = BD$ which from the above demonstration is impossible.

PROP. IX. THEOR.

If a point be taken within a circle, from which more than two equal straight lines fall upon the circumference, that point is the centre of the circle.

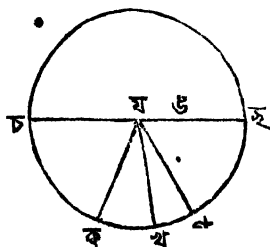
Let the point D be taken within the circle ABC, from which more than two equal straight lines, viz. DA, DB, DC, fall on the circumference, the point D is the centre of the circle.

For, if not, let E be the centre, join DE, and produce it to the circumference in F, G: then FG is a diameter of the

ডঘ উভয়ের সামান্য, এবং টডঘ কোণও খডঘ কোণের সমান হওয়াতে ঘট ভূমি ঘখ ভূমির সমান (১। ৪)। আর ঘখ ভিন্ন অন্য কোন রেখা ঘ হইতে পরিধি পর্য্যন্ত ঘট সমান টানা যায় না। যদি বল টানা যায় তবে ঘঢ তৎসমান হউক, তাহাতে ঘঢ ঘট সমান, ও ঘট ঘখ সমান হওয়াতে, ঘখ ঘঢ সমান হইবে, কিন্তু পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে ঘছ লঘুতমের নিকটতর রেখা দূরতরের সমান হইতে পারে না, সুতরাং ঘঢ ঘট সমান নহে। অতএব বৃত্তের বাহিরে, ইত্যাদি।

সং উ.। ওড = কড ∴ ওড + ঘড = কড + ঘড = কঘ। ওড + ঘড > ওঘ (১। ২০) ∴ কঘ > ওঘ। অপর ওড = চড, এবং ঘড, ওডঘ ও চডঘ ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং ∠ওডঘ > ∠চডঘ ∴ (১। ২৪) ওঘ > চঘ। ঐ রূপে চঘ > গঘ। পুনশ্চ ডট + টঘ > ডঘ, অর্থাৎ ডছ + ছঘ (১। ২০), এবং ডট = ডছ ∴ টঘ > ছঘ অর্থাৎ ছঘ ∠ টঘ। আর ডট + টঘ ∠ ডঠ + ঠঘ (১। ২১), ও ডট = ডঠ ∴ টঘ ∠ ঠঘ। ঐ রূপে ঠঘ ∠ জঘ। পুনশ্চ ডট = ডখ এবং ঘড, টঘড ও খঘড ত্রিভুজের সামান্য বাহু ও ∠ঘডট = ∠ঘডখ (অঙ্ক পাত) ∴ টঘ = খঘ (১। ৪), অন্য কোন রেখা = টঘ নহে, যদি সাধ্য হয় তবে ঘঢ = টঘ, ∴ ঘঢ = খঘ ইহা পূর্ব্বোক্ত উপপত্তিতে অসাধ্য।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

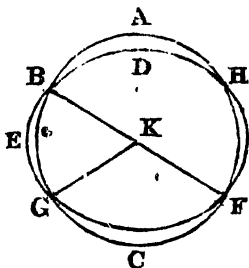
বৃত্তের মধ্যে কোন বিন্দু লইলে তথা হইতে যদি দুএর অধিক সরল রেখা পরিধি পর্য্যন্ত পরস্পর সমান হইয়া পড়িতে পারে তবে সেই বিন্দুই কেন্দ্র।

কখগ বৃত্তের মধ্যে ঘ বিন্দু লও, তথা হইতে দুএর অধিক রেখা অর্থাৎ ঘক, ঘখ, ঘগ, পরস্পর সমান হইয়া পরিধির উপর পড়ুক তাহাতে ঘ বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

circle ABC: And because in FG, the diameter of the circle ABC, there is taken the point D which is not the centre, DG is the greatest line from it to the circumference, and DC greater (7. 3.) than DB, and DB than DA; but they are likewise equal, which is impossible: Therefore E is not the centre of the circle ABC: In like manner, it may be demonstrated, that no other point than D is the centre. Wherefore, "*if a point be taken,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If D be not the centre, let it be E $\therefore$ DG $>$ DC and DC $>$ DB and BB $>$ DA (7. 3.) But DC $=$ DB $=$ DA (by Hyp.) which is impossible. $\therefore$ E is not the centre, nor any other but D.

PROP. X. THEOR.

One circle cannot cut another in more than two points.

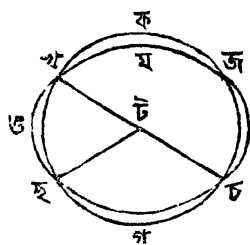
If it be possible, let the circumference FAB cut the circumference DEF in more than two points, viz. in B, G. F; take the centre K of the circle ABC, and join KB, KG, KF: and because within the circle DEF the point K is taken, from which more than two equal straight lines, viz KB, KG, KF, fall on the circumference, DEF, the point K is (9. 3.) the centre of the circle DEF; but K is also the centre of the circle ABC; therefore the same point is the centre of two circles that cut one another, which is impossible (5. 3.) Therefore "*one circumference of a circle cannot cut another in more than two points.*" Q. E. D.

Sym. Dem. If possible, then $\because$ K is the centre of the $\odot$ ABC, BK $=$ GK $=$ KF $\therefore$ K is also the centre of the $\odot$ DEF which is impossible (5. 3.)

কেননা যদি না হয় তবে ঙ কেন্দ্র কল্পনা করিয়া ঘ ঙ সংযুক্ত কর, এবং পরিধিস্থ চ ছ পর্য্যন্ত ঘঙ বৃদ্ধি কর, তাহাতে চছ কখগ বৃত্তের ব্যাস হইবে। অপর কখগ বৃত্তের চছ ব্যাসে কেন্দ্র ভিন্ন ঘ বিন্দু লওয়াতে ঘছ তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত বৃহত্তম রেখা হইবে (৩। ৭), এবং ঘগ ঘখ হইতে বৃহত্তর ও ঘখ ঘক হইতে বৃহত্তর। কিন্তু তাহাদিগকে সমান করিয়া কল্পনা করা গিয়াছে সুতরাং ইহা অসাধ্য। অতএব বৃত্তের কেন্দ্র ঙ নহে। এই রূপে ইহাও উপপন্ন হইতে পারে যে ঘ ভিন্ন অন্য কোন বিন্দু কেন্দ্র হইতে পারে না। অতএব বৃত্তের মধ্যে, ইত্যাদি।

সং উ.। যদিস্যাৎ ঘ কেন্দ্র না হয় তবে ঙ হউক ∴ ঘছ $\nearrow$ গঘ, গঘ $\nearrow$ খঘ, ও খঘ $\nearrow$ কঘ (৩। ৭) কিন্তু গঘ = খঘ = কঘ (কল্পনা) ইহা অসাধ্য ∴ ঙ কেন্দ্র নহে এবং ঘ ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুও হইতে পারেনা।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

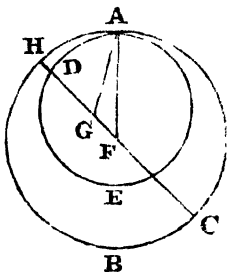
এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে দুএর অধিক বিন্দুতে ছিন্ন করিতে পারে না।

যদিস্যাৎ করিতে পারে তবে কখগ পরিধি ঘঙচ পরিধিকে দুএর অধিক খ,ছ,চ বিন্দুতে ছিন্ন করুক। কখগ বৃত্তের কেন্দ্র ট নির্ণয় কর এবং টখ, টছ, টচ রেখা টান তাহাতে ঘঙচ বৃত্তের মধ্যে ট বিন্দু হইতে দুএর অধিক সরল রেখা অর্থাৎ টখ, টছ, টচ ঘঙচ পরিধি পর্য্যন্ত পরস্পর সমান হওয়াতে (৩। ৯) ট বিন্দু ঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। কিন্তু ট কখগ বৃত্তেরও কেন্দ্র সুতরাং পরস্পর ছিন্ন করে এমত দুই বৃত্তের কেন্দ্র এক হয়, ইহা অসাধ্য (৩। ৫)। অতএব এক বৃত্ত পরিধি অন্যকে দুএর অধিক বিন্দুতে ছিন্ন করিতে পারেনা।

সং উ। যদি সাধ্য হয় তবে ট কখগ ⊙ কেন্দ্র হউক ∴ খট = ছট = টচ ∴ ট ঘঙচ ⊙ কেন্দ্র, ইহা অসাধ্য (৩। ৫)।

PROP. XI. THEOR.

If two circles touch each other internally, the straight line which joins their centres being produced, will pass through the point of contact.

Let the two circles ABC, ADE, touch each other internally in the point A, and let F be the centre of the circle ABC, and G the centre of the circle ADE; the straight line which joins the centres F, G, being produced, passes through the point A.

For, if not, let it fall otherwise, if possible, as FGDH, and join AF, AG: And because AG, GF are greater (20. 1.) than FA, that is, than FH, for FA is equal to FH, being radii of the same circle; take away the common part FG, and the remainder AG is greater than the remainder GH. But AG is equal to GD, therefore, GD is greater than GH; and it is also less, which is impossible. Therefore, the straight line which joins the points F and G cannot fall otherwise than on the point A; that is, it must pass through A. Therefore, "*if two circles*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If possible, let it fall otherwise as FGDH; then AG + GF $\urcorner$ AF (20. 1), AF = FH (11. Def. 1.) ∴ AG + GF $\urcorner$ FH or HG + GF ∴ AG $\urcorner$ GH. But AG = GD ∴ GD $\urcorner$ GH which is impossible (9. Ax. 1.)

PROP. XII. THEOR.

If two circles touch each other externally, the straight line which joins their centres will pass through the point of contact.

Let the two circles ABC, ADE touch each other externally in the point A; and let F be the centre of the circle ABC, and G the centre of ADE: The straight

১১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই বৃত্ত পরস্পর অন্তরে স্পর্শ করিলে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা বৃদ্ধি পাইলে ঐ স্পর্শ চিহ্ন দিয়া যাইবে।

কখগ ও কঘঙ দুই বৃত্ত ক বিন্দুতে পরস্পর অন্তরে স্পর্শ করুক, এবং চ কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হউক ও ছ কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র হউক। চ ছ দুই কেন্দ্রের সংযোজক রেখা বৃদ্ধি পাইলে ক বিন্দু দিয়া যাইবে। যদি ঐ বিন্দু দিয়া না যায় তবে তাহা অন্য প্রকারে চছঘজ ন্যায় পড়ুক। কচ কছ টান, অপর কছ ছচ একত্র চক হইতে বৃহত্তর (১। ২০), সুতরাং চজ হইতেও বৃহত্তর, কেননা চক চজ উভয়ে এক বৃত্তের কর্কট রেখা হওয়াতে পরস্পর সমান। তবে সামান্য অংশ চছ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট কছ ছজ হইতে বৃহত্তর হইবে। অপর কছ ছঘ সমান, সুতরাং ছঘ ছজ হইতে বৃহত্তর, কিন্তু ইহা অসাধ্য কেননা ছঘ লঘুতর (১। ৯ স্ব. সা.)। সুতরাং চ ও ছ দুই চিহ্ন সংযোজক সরলরেখা ক বিন্দু ভিন্ন অন্যত্র পড়িতে পারে না অর্থাৎ ইহা অবশ্য ক দিয়া যাইবে। অতএব দুই বৃত্ত, ইত্যাদি।

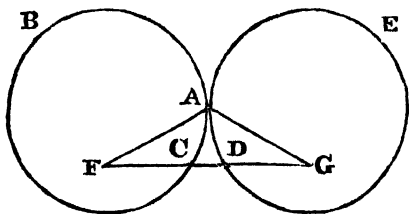
সং উ। যদি সাধ্য হয় তবে প্রকারান্তরে পড়ুক যথা চছঘজ। কছ + চছ 7 কচ (১। ২০), কচ = চজ (১। ১১ সং) ∴ কছ + চছ 7 চজ ∴ কছ 7 ছজ, কিন্তু কছ = ছঘ ∴ ছঘ 7 ছজ, ইহা অসাধ্য (১। ৯ স্ব. সা.)।

১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই বৃত্ত পরস্পর বাহিরে স্পর্শ করিলে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা বৃদ্ধি পাইলে ঐ স্পর্শ চিহ্ন দিয়া যাইবে।

কখগ কঘঙ দুই বৃত্ত ক বিন্দুতে পরস্পর বাহিরে স্পর্শ করুক, এবং চ কখগ বৃত্তের ও ছ কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র

line which joins the points F, G, must pass through the point of contact A.

For, if not, let it pass otherwise, if possible, as FCDG, and join FA, AG: and because F is the centre of the circle ABC, AF is equal to FC: Also, because G is the centre of the circle ADE, AG is equal to GD. Therefore FA, AG are equal to FC, DG;

wherefore the whole FG is greater than FA, AG; but it is also less (20. 1.), which is impossible: Therefore the straight line which joins the points F, G, cannot pass otherwise than through the point of contact A; that is, it passes through A. Therefore, "*if two circles*" &c. Q. E. D.

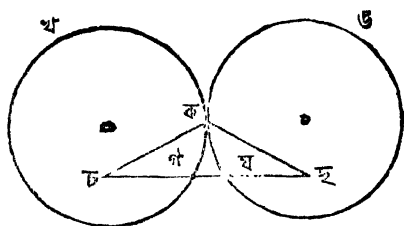
Sym. Dem. If possible, let it fall otherwise as FCDG. Then F being the centre of the ⊙ ABC, AF = FC. Similarly AG = GD ∴ FA + AG = FC + DG ∴ FG + CD + DG or the whole FG ⁊ FA + AG which is impossible (20. 1.)

PROP. XIII. THEOR.

One circle cannot touch another in more points than one, whether it touch it on the inside or outside.

For, if it be possible, let the circle EBF touch the circle ABC in more points than one, and first on the inside, in the points B, D; join BD, and draw (10, 11. 1.) GH, bisecting BD at right angles: Therefore, because the points B, D, are in the circumference of each of the circles, the straight line BD falls within each (2. 3.) of them; and therefore their centres are (Cor. 1. 3.) in the straight line GH, which bisects BD

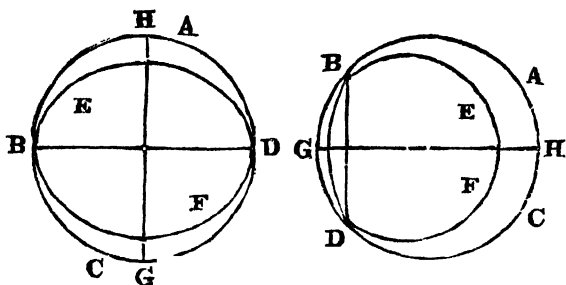
হউক। চ ছ সং-যোজক সরল রে-খা বৃদ্ধি পাইলে স্পর্শ চিহ্ন ক দিয়া যাইবে।

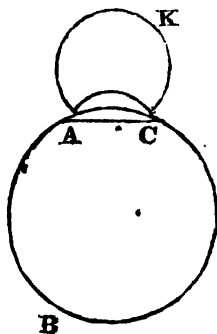
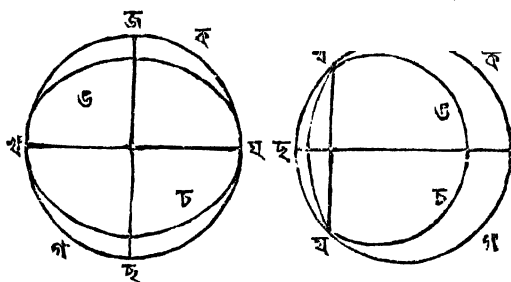
যদি এ চিহ্ন দিয়া না যায় তবে চগঘছ ন্যায় অন্য প্রকারে যাউক। চক কছ টান. অপর কখগ বৃত্তের কেন্দ্র চ হওয়াতে কচ চগ সমান এবং কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র ছ হওয়াতে কছ ছঘ সমান, অতএব চক ও কছ, চগ ও ঘছ সহিত সমান সুতরাং সমুদয় চছ, চক ও কছ হইতে বৃহত্তর, কিন্তু (১। ২০) তাহা লঘুতর ও বটে, অতএব ইহা অসাধ্য, সুতরাং চ ছ দুই বিন্দু সংযোজক সরল রেখা স্পর্শ চিহ্ন ক দিয়া না গিয়া অন্য প্রকারে যাইতে পারে না, অর্থাৎ তাহা অবশ্য ক দিয়া যাইবে। অতএব দুই বৃত্ত, ইত্যাদি।

সং উ। যদি সাধ্য হয় তবে প্রকারান্তরে পড়ুক যথা চগ ঘছ। চ কখগ⊙ কেন্দ্র হওয়াতে কচ = চগ। ঐ রূপে কছ = ছঘ ∴ চক + কছ = চগ + ঘছ ∴ চগ + গঘ + ঘছ অর্থাৎ সমুদয় চছ > চক + কছ, ইহা অসাধ্য (১। ২০)।

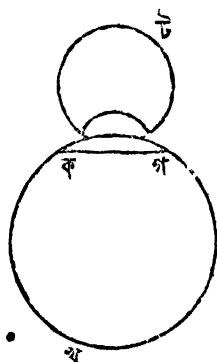
১৩ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে একের অধিক বিন্দুতে অন্তরে কিম্বা বাহিরে স্পর্শ করিতে পারে না।

যদি বল পারে, তবে ঙখচ বৃত্ত কখগ বৃত্তকে একের অধিক বিন্দুতে স্পর্শ করুক, প্রথমত যেন খ, ঘ, বিন্দুতে অন্তরে স্পর্শ করিতেছে। খ ঘ সংযুক্ত কর এবং খঘ রেখাতে লম্বভাবে দ্বিখণ্ড কারক ছজ রেখা টান (১। ১০ এবং ১১)। খ, ঘ, দুই বিন্দু প্রত্যেক বৃত্তের পরিধিতে থাকাতে খঘ সরল রেখা প্রত্যেক বৃত্তের মধ্যে পড়িতেছে (১। ২), সুতরাং তাহাদের

at right angles: Therefore GH passes through the point of contact (11. 3.); but it does not pass through it, because the points B, D are without the straight

line GH, which is absurd: Therefore, *one circle cannot touch another on the inside in more points than one.*

Nor can two circles touch one another *on the outside* in more than one point: For, if it be possible, let the circle ACK, touch the circle ABC in the points A, C, and join AC: Therefore, because the two points A, C, are in the circumference of the circle ACK, the straight line AC which joins them falls within (2. 3.) the circle ACK: And the circle AKC is without the circle ABC; and therefore the straight line AC is also without ABC; but, because the points A, C, are in the circumference of the circle ABC, the straight line AC is within (2. 3.) the same circle, which is absurd: Therefore *a circle cannot touch another on the outside in more than one point;* and it has been shown, that *a circle cannot touch another on the inside in more than one point.* Therefore, "*one circle,*" &c. Q. E. D.

কেন্দ্র সে রেখাতে আছে (৩। ১ অনু.) কেননা ছজ, খঘ রেখাকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ড করিতেছে, অতএব ছজ স্পর্শ চিহ্ন দিয়া যাইবে (৩। ১১), কিন্তু খ, ঘ দুই বিন্দু ছজ রেখার

বাহিরে থাকাতে তাহা স্পর্শ চিহ্ন দিয়া যাইতে পারে না সুতরাং এই ব্যভিচার দোষহেতু এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে একের অধিক বিন্দুতে অন্তরে স্পর্শ করিতে পারে না।

দ্বিতীয়তঃ, এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে একের অধিক বিন্দুতে বাহিরেও স্পর্শ করিতে পারে না। যদি বল পারে তবে কগট বৃত্ত কখগ বৃত্তকে ক, গ দুই বিন্দুতে স্পর্শ করুক। ক গ সংযুক্ত কর, অতএব ক, গ দুই বিন্দু কগট বৃত্তের পরিধিতে থাকাতে কগ রেখা কগট বৃত্তের মধ্যে পড়িবে (৩। ২) এবং কখগ বৃত্ত কগট বৃত্তের বাহিরে থাকাতে কগ রেখাও কখগ বৃত্তের বাহিরে থাকিবে, কিন্তু ক, গ দুই বিন্দু কখগ বৃত্তের পরিধিতে আছে

এই হেতুক কগও ঐ বৃত্তের মধ্যে পড়ে (৩। ২), ইহা অসাধ্য, অতএব এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে একের অধিক বিন্দুতে বাহিরে স্পর্শ করিতে পারে না এবং পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে যে এক বৃত্ত

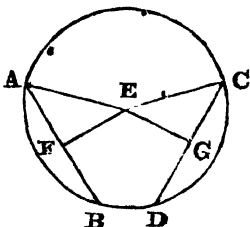
Sym. Dem. If ⊙s ABC, EBF touch one another *internally* in more points than one i. e. B, D, then BD must fall within each of them (2. 3.) ∴ the centres of both ⊙s are in GH (cor. 1. 3.) ∴ GH must pass through B, D, (11. 3.) but it does not; ∴ the ⊙s cannot touch in more than one point.

Again; If ⊙s ACK, ABC touch one another *externally* in more points than one i. e. A, C, then AC is within ⊙ ACK and also within ⊙ABC (2. 3.) and ∵ ⊙ACK is without ⊙ ABC ∴ AC is without ⊙ ABC which is absurd; ∴ the ⊙s cannot touch externally in more than one point.

PROP. XIV. THEOR.

Equal straight lines in a circle are equally distant from the centre; and those which are equally distant from the centre, are equal to one another.

Let the straight lines AB, CD, in the circle ABDC, be equal to one another; they are equally distant from the centre.

Take E the centre (1. 3.) of the circle ABDC, and from it draw EF, EG, perpendiculars to AB, CD; join AE and EC. Then, because the straight line EF passing through the centre, cuts the straight line AB, which does not pass through the centre, at right angles, it also bisects (3. 3.) it: Wherefore AF is equal to FB, and AB double of AF. For the same reason, CD is double of CG: But AB is equal to CD; therefore AF is equal to CG:

And because AE is equal to EC, the square of AE is equal to the square of EC: Now the squares of AF, FE are equal (47. 1.) to the square of AE, because the angle AFE is a right angle; and, for the like reason, the squares of EG, GC are equal to the square

অন্য বৃত্তকে একের অধিক বিন্দুতে অন্তরেও স্পর্শ করিতে পারে না। অতএব এক বৃত্ত, ইত্যাদি।

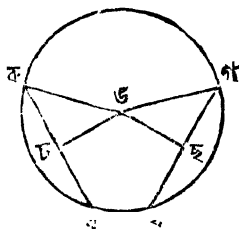
সং উ.। যদি কখগ ও ঙখচ দুই⊙ একের অধিক খ, ঘ, বিন্দুতে অন্তরে স্পর্শ করে তবে খঘ প্রত্যেক ⊙ মধ্যে পড়িবে (৩। ২), ∴ দুই ⊙ কেন্দ্র ছজ মধ্যে হইবে (৩। ১০ অনু.) ∴ ছজ, খ, ঘ মধ্যদিয়া যাইবে (৩। ১১), কিন্তু তাহা নহে ∴ ঐ দুই⊙ একের অধিক বিন্দুতে স্পর্শ করে না।

দ্বিতীয়তঃ যদি কগট, কখগ দুই⊙ একের অধিক ক, গ, বিন্দুতে বাহিরে স্পর্শ করে তবে কগ, কগট⊙ মধ্যে পড়িবে (৩। ২) এবং কখগ⊙ মধ্যেও পড়িবে। কিন্তু কগট⊙, কখগ⊙ বহিস্থ ∴ কগ, কখগ⊙ বহিস্থ, ইহা অসাধ্য ∴ ঐ দুই⊙ একের অধিক বিন্দুতে বাহিরে স্পর্শ করে না।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্ত মধ্যস্থ যে২ সরল রেখা পরস্পর সমান তাহারা কেন্দ্র হইতে সমান২ দূরে থাকে; আর যাহারা কেন্দ্র হইতে সমান দূরস্থ তাহারা পরস্পর সমান।

কখঘগ বৃত্তেতে কখ, গঘ সরল রেখা পরস্পর সমান আছে, তাহারা কেন্দ্র হইতে সমদূর হইবে।

কখঘগ বৃত্তের কেন্দ্র ঙ নির্ণয় কর (৩। ১), এবং তথা হইতে ঙচ এবং ঙছ, কখ এবং গঘ রেখার উপর লম্বভাবে টান। কঙ ও ঙগ সংযুক্ত কর, অপর ঙচ রেখা কেন্দ্র দিয়া আসিয়া কেন্দ্রগত নহে এমত কখ রেখার উপর লম্বভাবে পড়াতে (৩। ৩) তাহাকে দ্বিখণ্ড করিতেছে, সুতরাং কচ চখ সমান, ও কখ, কচ রেখার দ্বিগুণ। ঐ কারণ গঘ, গছ রেখার দ্বিগুণ। এবং কখ গঘ সমান হওয়াতে কচ গছ সমান হইবে, আর কঙ ঙগ সমান হওয়াতে কঙ সমচতুর্ভুজ ঙগ সমচতুর্ভুজ সমান। অপর কচ ঙচ সমচতুর্ভুজ একত্র কঙ সমচতুর্ভুজ

of EC: Therefore, the squares of AF, FE are equal to the squares of CG, GE, of which the square of AF is equal to the square of CG, because AF is equal to CG; therefore the remaining square of FE is equal to the remaining square of EG, and the straight line EF is therefore equal to EG: But straight lines in a circle are said to be equally distant from the centre, when the perpendiculars drawn to them from the centre are equal (3. Def. 3.): Therefore AB, CD are equally distant from the centre.

Next. If the straight lines AB, CD be equally distant from the centre, that is, if FE be equal to EG, AB is equal to CD. For, the same construction being made, it may, as before, be demonstrated, that AB is double of AF, and CD double of CG, and that the squares of EF, FA are equal to the squares of EG, GC; of which the square of FE is equal to the square of EG, because FE is equal to EG; therefore the remaining square of AF is equal to the remaining square of CG; and the straight line AF is therefore equal to CG: But AB is double of AF, and CD double of CG: wherefore AB is equal to CD. Therefore, "*equal straight lines*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. EF is $\perp$ to AB $\therefore$ AF $=$ FB (3. 3.) and AB $=$ 2AF. Similarly CD $=$ 2CG. AB $=$ CD. (Hyp.) $\therefore$ AF $=$ CG (7. Ax. 1.) AE $=$ EC (11. Def. 1.) $\therefore$ $AE^2 = EC^2$. Now $AE^2 = AF^2 + FE^2$ and $EC^2 = CG^2 + EG^2$ (47. 1.) $\therefore$ $AF^2 + FE^2 = CG^2 + EG^2$. But AF $=$ CG $\therefore$ $AF^2 = CG^2$ $\therefore$ $EF^2 = EG^2$ (3. Ax. 1.) $\therefore$ EF $=$ EG $\therefore$ AB and CD are equidistant from the centre (3. Def. 3.)

Again, If AB and CD be equidistant from the centre, EF $=$ EG (3. Def. 3.) It may be shown as before that AB $=$ 2AF and CD $=$ 2CG and $EF^2 + FA^2 = EG^2 + CG^2$. Now $EF^2 = EG^2$ $\therefore$ $AF^2 = CG^2$ $\therefore$ AF $=$ CG $\therefore$ AB $=$ CD.

সমান (১। ৪৭) কেননা কচঙ এক সমকোণ। ঐ প্রকারে ঙছ ছগ সমচতুর্ভুজ একত্র গঙ সমচতুর্ভুজ সমান, অতএব কচ ঙচ সমচতুর্ভুজ গছ ছঙ সমচতুর্ভুজের সমান, ইহার মধ্যে কচ সমচতুর্ভুজ গছ সমচতুর্ভুজ সমান; কেননা কচ গছ পরস্পর সমান, সুতরাং অবশিষ্ট ঙচ সমচতুর্ভুজ ছঙ সমচতুর্ভুজের সমান, এবং তন্নিমিত্তে ঙচ ছঙ ও সমান। অপর যে২ সরল রেখার উপর কেন্দ্র হইতে সমান২ লম্বপাত হয় তাহাদিগকে কেন্দ্র হইতে সমদূর কহা যায় (৩। ৩ সং) সুতরাং কখ, গঘ কেন্দ্র হইতে সমদূর।

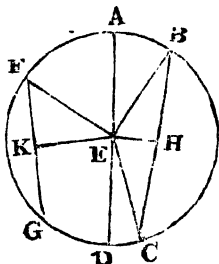
পুনশ্চ, যদি কখ, গঘ রেখা কেন্দ্র হইতে সমদূর হয় অর্থাৎ যদি ঙচ ও ঙছ পরস্পর সমান হয় তবে কখ গঘও পরস্পর সমান, কেননা পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত করিলে দর্শিত হইতে পারে যে কখ কচ রেখার দ্বিগুণ ও গঘ গছ রেখার দ্বিগুণ, এবং ঙচ কচ সমচতুর্ভুজ একত্র ঙছ গছ সমচতুর্ভুজের সমান, তাহার মধ্যে ঙচ সমচতুর্ভুজ ঙছ সমচতুর্ভুজের সমান কেননা ঙচ ঙছ সমান, অতএব অবশিষ্ট কচ সমচতুর্ভুজ গছ সমচতুর্ভুজের সমান এবং তন্নিমিত্তে কচ রেখা গছ রেখার সমান, আর কখ কচ রেখার দ্বিগুণ ও গঘ গছ রেখার দ্বিগুণ, সুতরাং কখ ও গঘ পরস্পর সমান। অতএব, বৃত্ত মধ্যস্থ, ইত্যাদি।

সং উ.।' ঙচ $\perp$ কখ $\therefore$ কচ $=$ চখ (৩। ৩), ও কখ $=$ ২কচ। ঐরূপে গঘ $=$ ২গছ। কখ $=$ গঘ (কল্পনা) $\therefore$ কচ $=$ গছ (১। ৭ স্ব. সা.) কঙ $=$ ঙগ (১। ১১ সং) $\therefore$ কঙ^২ $=$ ঙগ^২। অপর কঙ^২ $=$ কচ^২ $+$ ঙচ,^{২} এবং ঙগ^২ $=$ গছ^২ $+$ ঙছ^২ (১। ৪৭) $\therefore$ কচ^২ $+$ ঙচ^২ $=$ গছ^২ $+$ ঙছ^২। কিন্তু কচ $=$ গছ $\therefore$ কচ^২ $=$ গছ^২ $\therefore$ ঙচ^২ $=$ ঙছ^২ (১। ৩ স্ব. সা.) $\therefore$ ঙচ $=$ ঙছ $\therefore$ কখ এবং গঘ কেন্দ্র হইতে সমদূর (৩। ৩ সং)।

পুনশ্চ, যদি কখ ও গঘ কেন্দ্র হইতে সমদূর হয় তবে ঙচ $=$ ঙছ (৩। ৩ সং), পূর্ব্ববৎ দর্শিত হইতে পারে যে কখ $=$ ২কছ এবং গঘ $=$ ২গছ এবং ঙচ^২ $+$ কচ^২ $=$ ঙছ^২ $+$ গছ^২। অপর ঙচ^২ $=$ ঙছ^২ $\therefore$ কচ^২ $=$ গছ^২ $\therefore$ কচ $=$ গছ $\therefore$ কখ $=$ গঘ।

PROP. XV. THEOR.

The diameter is the greatest straight line in a circle; and, of all others, that which is nearer to the centre is always greater than one more remote; and the greater is nearer to the centre than the less.

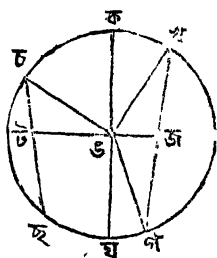
Let ABCD be a circle, of which the diameter is AD, and the centre E; and let BC be nearer to the centre than FG; AD is greater than any straight line BC which is not a diameter, and BC greater than FG.

From the centre draw EH, EK perpendiculars to BC, FG, and join EB, EC, EF; and because AE is equal to EB, and ED to EC, AD is equal to EB, EC: But EB, EC are greater (20. 1.) than BC; wherefore, also AD is greater than BC.

And because BC is nearer to the centre than FG, EH is less (4. Def. 3.) than EK: but as was demonstrated in the preceding, BC is double of BH, and FG double of FK, and the squares of EH, HB are equal to the squares of EK, KF, of which the square of EH is less than the square of EK, because EH is less than EK; therefore the square of BH is greater than the square of FK, and the straight line BH greater than FK; and therefore BC is greater than FG.

Next, Let BC be greater than FG; BC is nearer to the centre than FG; that is, the same construction being made, EH is less than EK: Because BC is greater than FG, BH likewise is greater than KF; but the squares of BH, HE are equal to the squares of FK, KE, of which the square of BH is greater than the square of FK, because BH is greater than FK; therefore the square of EH is less than the square of EK, and the straight line EH less than EK. Wherefore, "the *diameter*," &c. Q. E. D.

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের মধ্যে ব্যাস বৃহত্তম সরলরেখা, এবং অন্যান্য রেখার মধ্যে যাহা কেন্দ্রের নিকটতর তাহা সর্ব্বদা দূরতর হইতে বৃহৎ; আর বৃহত্তর রেখা লঘুতর হইতে কেন্দ্রের নিকটতর।

কখগঘ এক বৃত্ত, কঘ তাহার ব্যাস এবং কেন্দ্র ঙ। খগ, চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর, কঘ ব্যাসভিন্ন অন্য এক রেখা খগ হইতে বৃহত্তর, এবং খগ, চছ হইতে বৃহত্তর।

খগ ও চছ রেখার উপর কেন্দ্র হইতে ঙজ ও ঙট লম্বপাত হউক এবং ঙ খ, ঙ গ, ঙ চ, সংযোগ কর। অপর কঙ ঙখ সমান ও ঙঘ ঙগ সমান হওয়াতে কঘ, ঙখ ও ঙগ যোগ তুল্য, কিন্তু ঙখ ও ঙগ একত্র খগ হইতে বৃহত্তর (১। ২০), সুতরাং কঘও খগ হইতে বৃহত্তর।

অপর খগ চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর হওয়াতে (৩। ৪ সং) ঙজ টঙ হইতে লঘুতর, আর পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞাতে যে রূপ দর্শিত হইয়াছে তদনুসারে খগ খজ রেখার দ্বিগুণ ও চছ চট রেখার দ্বিগুণ, এবং ঙজ ও খজ সমচতুর্ভুজ একত্র ঙট ও চট সমচতুর্ভুজের সমান, তাহার মধ্যে ঙজ সমচতুর্ভুজ টঙ সমচতুর্ভুজের লঘুতর কেননা ঙজ টঙ হইতে লঘুতর, সুতরাং খজ সমচতুর্ভুজ চট সমচতুর্ভুজ হইতে বৃহত্তর, তন্নিমিত্তে খজ চট হইতে বৃহত্তর সুতরাং খগ চছ হইতে বৃহত্তর।

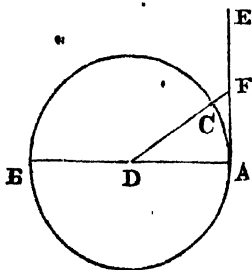
পুনশ্চ, খগ যদি চছ হইতে বৃহত্তর হয় তবে খগ চছ হইতে কেন্দ্রের নিকটতর হইবে, যথা পূর্ব্ববৎ অঙ্কপাত হইলে ঙজ ঙট হইতে লঘুতর হইবে। খগ চছ হইতে বৃহত্তর হওয়াতে খজও চট হইতে বৃহত্তর হইবে, কিন্তু খজ ঙজ সমচতুর্ভুজ একত্র চট টঙ সমচতুর্ভুজের সমান, তাহার মধ্যে খজ সমচতুর্ভুজ চট সমচতুর্ভুজ হইতে বৃহত্তর, কেননা খজ চট হইতে

Sym. Dem. AE = EB and ED = EC ∴ AE + ED = AD = EB + EC. Now EB + EC 7 BC (20. 1.) ∴ AD 7 BC. Moreover BC is nearer to the centre than FG (Hyp) ∴ EH ∠ EK (4. Def. 3.) But (as shown in the preceding Prop.) BC = 2BH and FG = 2 FK and $EH^2 + HB^2 = EK^2 + KF^2$. And ∵ EH ∠ EK, EH^2 ∠ EK^2 ∴ HB^2 7 FK^2 ∴ HB 7 FK ∴ BC 7 FG. Next, suppose BC 7 FG ∴ BH 7 FK. But (as shown before) $BH^2 + HE^2 = FK^2 + EK^2$ and BH^2 7 FK^2 ∴ HE^2 ∠ EK^2 ∴ HE ∠ EK and so BC nearer the centre than FG.

PROP. XVI. THEOR.

The straight line drawn at right angles to the diameter of a circle, from the extremity of it, falls without the circle; and no straight line can be drawn between that straight line and the circumference, from the extremity of the diameter, so as not to cut the circle.

Let ABC be a circle, the centre of which is D, and the diameter AB; and let AE be drawn from A perpendicular to AB, AE shall fall without the circle.

In AE take any point F, join DF, and let DF meet the circle in C. Because DAF is a right angle, it is greater than the angle AFD (32. 1.); but the greater angle of any triangle is subtended by the greater side (19. 1.), therefore DF is greater than DA; now DA is equal to DC, therefore DF is greater than DC, and the point F is therefore without the circle. And F is any point whatever in the line AE, therefore AE, falls without the circle.

বৃহত্তর, সুতরাং ঙজ সমচতুর্ভুজ ঙট সমচতুর্ভুজ হইতে লঘু-তর এবং ঙজ রেখা ঙট হইতে লঘুতর। অতএব বৃত্তের মধ্যে, ইত্যাদি।

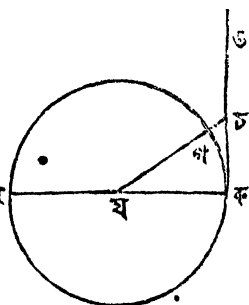
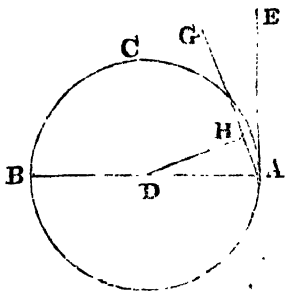
সং উ.। কঙ = খঙ এবং ঘঙ = গঙ ∴ কঙ + ঘঙ = কঘ = খঙ + গঙ। খঙ + গঙ $>$ খগ (১। ২০) ∴ কঘ $>$ খগ। পুনশ্চ খগ, চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর (কল্পনা) ∴ ঙজ $<$ ঙট (৩ : ৪ সং) কিন্তু (পূর্ব্ব প্রতিজ্ঞাতে দর্শিত হইয়াছে) খগ = ২খজ এবং চছ = ২চট এবং ঙজ^2 + খজ^2 = ঙট^2 + চট^2। আর ঙজ $<$ ঙট ∴ ঙজ^2 $<$ ঙট^2 ∴ খজ^2 $>$ চট^2 ∴ খজ $>$ চট ∴ খগ $>$ চছ।

দ্বিতীয়তঃ খগ $>$ চছ ∴ খজ $>$ চট। কিন্তু (পূর্ব্বে দর্শিত হইয়াছে) খজ^2 + ঙজ^2 = চট^2 + ঙট^2 এবং খজ^2 $>$ চট^2 ∴ ঙজ^2 $<$ ঙট^2 ∴ ঙজ $<$ ঙট এবং খগ, চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্বভাবে সরল রেখা টানিলে বৃত্তের বাহিরে পড়িবে, এবং ঐ রেখার ও পরিধির মধ্যে কোন সরল রেখা বৃত্তকে ছিন্ন না করিয়া ব্যাসের প্রান্ত হইতে টানা-যাইতে পারে না।

কখগ এক বৃত্ত, তাঁহার কেন্দ্র ঘ, এবং ব্যাস কখ; ক বিন্দু হইতে কখ উপর কঙ লম্ব টান, এই কঙ বৃত্তের বাহিরে পড়িবে।

কঙ মধ্যে চ এক বিন্দুর নির্দ্দেশ করিয়া ঘ চ সংযুক্ত কর, এবং ঘচ যেন গ বিন্দুতে বৃত্তেতে সংলগ্ন হইতেছে। ঘকচ সমকোণ হওয়াতে কচঘ হইতে অধিক হইতেছে (১। ৩২), এবং ত্রিভুজের বৃহত্তর

Again, Between the straight line AE and the circumference, no straight line can be drawn from the point A, which does not cut the circle. Let AG be drawn, in the angle DAE; from D draw DH at right angles to AG; and because the angle DHA is a right angle, and the angle DAH is less than a right angle, the side DH of the triangle DAH is less than the side DA (19. 1.). The point H, therefore, is within the circle, and therefore the straight line AG cuts the circle.

Cor. From this it is manifest, that *the straight line which is drawn at right angles to the diameter of a circle from the extremity of it, touches the circle;* and that *it touches it only in one point;* because, if it did meet the circle in two, it would fall within it (2. 3.). Also, it is evident, that *there can be but one straight line which touches the circle in the same point.*

Sym. Dem. $\angle$DAF is a Rt. $\angle$ $\therefore$ (32. 1.) $\angle$DAF $\urcorner$ $\angle$AFD $\therefore$ (19. 1.) DF$\urcorner$ DA, and so F and therefore AE are without the $\odot$.

Next, $\angle$DHA is a Rt. $\angle$ $\therefore$ $\angle$DAH $\angle$ $\angle$DHA (32. 1.) $\therefore$ DH $\angle$DA (19 1). H then is within the $\odot$ and AG cuts it.

কোণের সম্মুখস্থ বাহুও বৃহত্তর (১। ১৯), একারণ ঘচ কঘ হইতে অধিক। অপর কঘ গঘ সমান অতএব ঘচ গঘ হইতেও অধিক, সুতরাং চ বিন্দু বৃত্তের বাহিরে পড়িতেছে, আর কঙ রেখার মধ্যে যত্রতত্র চ এক বিন্দু, একারণ কঙ রেখাও বৃত্তের বাহিরে পড়িতেছে।

পুনশ্চ, ক বিন্দু হইতে কঙ রে-খার ও পরিধির মধ্যে কোন সরল রেখা বৃত্তকে ছিন্ন না করিয়া অঙ্কিত হইতে পারে না। খকঙ কোণের মধ্যে কছ রেখা টান এবং ঘ হইতে ঘজ কছ রেখার উপর লম্বভাবে টান। ঘজক সমকোণ হওয়াতে ঘকজ সমকোণ হইতে ন্যূন এবং তন্নিমিত্তে ঘকজ ত্রিভুজে ঘজ বাহু ঘক বাহু হইতে (১। ১৯) লঘুতর।

সুতরাং জ বিন্দু বৃত্তের মধ্যে আছে এবং তন্নিমিত্তে কছ সরল রেখা বৃত্তকে ছিন্ন করিতেছে।

অনুমান। অতএব স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে সে রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং কেবল এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে, কেননা দুই বিন্দুতে বৃত্তের সহিত সংলগ্ন হইলে বৃত্তের মধ্যে পড়ে। আরো স্পষ্ট হইতেছে যে এক বিন্দুতে কেবল এক সরল রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতে পারে।

সং উ। ∠ঘকচ এক সমকোণ ∴ (১। ৩২) ∠ঘকচ ⁊ ∠কচঘ ∴ (১। ১৯) ঘচ ⁊ ঘক, সুতরাং চ বিন্দু এবং কঙ রেখা ⊙বহিস্থ। দ্বিতীয়তঃ ∠ঘজক এক সম ∠ ∴ ∠ঘকজ ∠ ∠ঘজক (১। ৩২) ∴ ঘজ ∠ ঘক (১। ১৯) ∴ জ ⊙মধ্যস্থ এবং কছ তাহাকে ছিন্ন করে।

PROP. XVII. PROB.

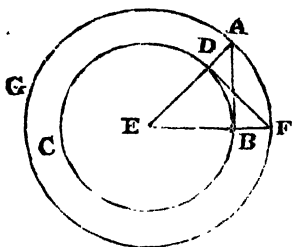
To draw a straight line from a given point, either without or in the circumference, which shall touch a given circle.

First, Let A be a given point without the given circle BCD; it is required to draw a straight line from A which shall touch the circle.

Find (1. 3.) the centre E of the circle, and join AE; and from the centre E, at the distance EA, describe the circle AFG; from the point D draw (11. 1.) DF at right angles to EA; join EBF, and draw AB. AB touches the circle BCD.

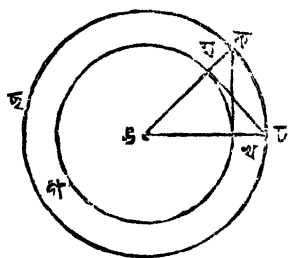
Because E is the centre of the circles BCD, AFG, EA is equal to EF, and ED to EB; therefore the two sides AE, EB are equal to the two FE, ED, and they contain the angle at E common to the two triangles AEB, FED; therefore the base DF is equal to the base AB, and the triangle FED to the triangle AEB, and the other angles to the other angles (4. 1.): Therefore the angle EBA is equal to the angle EDF; but EDF is a right angle, wherefore EBA is a right angle; and EB is drawn from the centre: but a straight line drawn from the extremity of a diameter, at right angles to it, touches the circle (Cor. 16. 3.): Therefore AB touches the circle; and is drawn from the given point A. *Which was to be done.*

But, if the given point be in the circumference of the circle, as the point D, draw DE to the centre E, and DF at right angles to DE; DF touches the circle (Cor. 16. 3.)

Sym. Dem. EA = EF, ED = EB, and ∠E com-

১৭ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

পরিধির বহিস্থ কিম্বা মধ্যস্থ কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এমত এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

প্রথমতঃ। খগঘ নির্দ্দিষ্ট বৃত্তের বহিস্থ বিন্দু ক। বৃত্তকে স্পর্শ করে এমত এক সরল রেখা ক হইতে টানিতে হইবে।

বৃত্তের কেন্দ্র ঙ নির্দ্দেশ করিয়া ক ঙ সংযুক্ত কর। ঙ বিন্দু হইতে ঙক দূরে কচছ বৃত্ত অঙ্কিত কর, এবং ঘ বিন্দু হইতে ঙঘ রেখার উপর ঘচ লম্ব টান, পরে ঙখচ ও কখ রেখা টান। কখ খগঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে।

খগঘ কচছ দুই বৃত্তের কেন্দ্র ঙ হওয়াতে ঙক ও ঙচ সমান এবং ঙখ ও ঙঘ সমান, সুতরাং কঙ ঙখ দুই বাহু ক্রমশ চঙ ঙঘ সমান এবং তাহাদের অন্তর্বর্ত্তি ঙ কোণ কঙখ ও চঙঘ উভয় ত্রিভুজের সামান্য কোণ, সুতরাং ঘচ ভূমি কখ ভূমির সমান এবং চঙঘ ত্রিভুজ কঙখ ত্রিভুজের সমান, এবং একটীর অন্যান্য কোণ অন্যটীর অন্যান্য কোণের সমান (১। ৪), তন্নিমিত্তে ঙখক কোণ ঙঘচ সমান, অপর ঙঘচ এক সমকোণ, সুতরাং ঙখক কোণও সমকোণ, এবং ঙখ কেন্দ্র হইতে টানা গিয়াছে, আর (৩। ১৬ অনু.) ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে সে রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করে, সুতরাং কখ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং ক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে টানা গিয়াছে, ইহাই এ স্থলে সম্পাদ্য।

দ্বিতীয়তঃ। ঘ বিন্দুর ন্যায় কোন বিন্দু পরিধিতে নির্দ্দিষ্ট থাকিলে ঘ ঙ কেন্দ্র পর্য্যন্ত টানিয়া তাহার উপর ঘচ লম্বভাবে টান, সুতরাং ঘচ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে (৩। ১৬ অনু)।

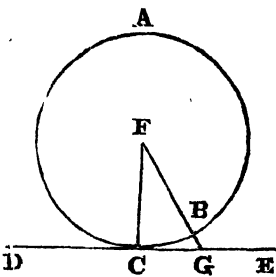
সং উ.। ঙক = ঙচ, ঙঘ = ঙখ, এবং ∠ঙ, কঙখ ও চঙঘ

mon to △s AEB, FED ∴ (4. 1) ∠EBA = ∠EDF Now ∠EDF is a Rt. ∠ ∴ EBA is a Rt. ∠ ∴ AB touches the ⊙ (cor. 16. 3.)

PROP. XVIII. THEOR.

If a straight line touch a circle, the straight line drawn from the centre to the point of contact is perpendicular to the line touching the circle.

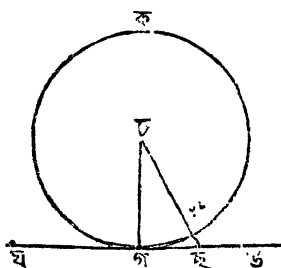
Let the straight line DE touch the circle ABC in the point C; take the centre F, and draw the straight line FC: FC is perpendicular to DE.

For, if it be not, from the point F draw FBG perpendicular to DE; and because FGC is a right angle, GCF must be (17. 1.) an acute angle; and to the greater angle the greater (19. 1.) side is opposite: Therefore FC is greater than FG; but FC is equal to FB; therefore FB is greater than FG, the less than the greater, which is impossible; wherefore FG is not perpendicular to DE: In the same manner, it may be shown, that no other line than FC can be perpendicular to DE; FC is therefore perpendicular to DE. Therefore, "*if a straight line*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If FC be not ⊥ to DE let FBG be so. Then ∠FGC is a Rt. ∠ ∴ ∠GCF is an acute angle ∴ FC > FG (19. 1.) FC = FB ∴ FB > FG which is impossible (9. Ax. 1,) ∴ FG is not ⊥ to DE nor any other but FC.

ত্রিভুজের সামান্য কোণ ∴ (১। ৪) ∠ঙখক = ∠ঙঘচ। ঙঘচ এক সম ∠ ∵ ∠ঙখক এক সম ∠ ∴ কখ ⊙ স্পর্শ করে (৩। ১৬ অনু)।

১৮ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিলে কেন্দ্র হইতে স্পর্শ চিহ্ন পর্য্যন্ত যদি সরল রেখা টানা যায় তবে তাহা ঐ বৃত্ত স্পর্শক রেখার লম্ব হইবে।

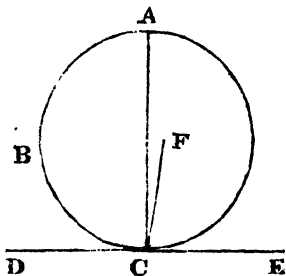
ঘঙ রেখা কখগ বৃত্তকে গ বিন্দুতে স্পর্শ করুক। চ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া চগ রেখা টান, গচ ঘঙ রেখার লম্ব হইবে। কেননা চগ যদি লম্ব না হয় তবে চ বিন্দু হইতে ঘঙ রেখার উপর চখছ লম্ব টান। অপর চছগ সমকোণ হওয়াতে (১। ১৭) চগছ অবশ্য লঘু কোণ হইবে, এবং (১। ১৯)

বৃহত্তর কোণের সম্মুখস্থ বাহুও বৃহত্তর হওয়াতে চগ চছ হইতে বৃহত্তর হইবে, এবং চগ চখ সমান হওয়াতে চখ চছ হইতে বৃহত্তর হইবে, কিন্তু লঘুতর বৃহত্তর হইতে বৃহৎ হইতে পারে না, সুতরাং চছ ঘঙ রেখার লম্ব নহে। এই রূপে উপপন্ন হইতে পারে যে চগ ভিন্ন অন্য কোন রেখা ঘঙ রেখার উপর লম্ব হইবে না, অতএব চগ ঘঙ রেখার লম্ব। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

সং উ.। চগ যদি ⊥ ঘঙ না হয় তবে চখছ লম্ব হউক, তাহাতে ∠চছগ এক সম ∠ ∴ ছগচ লঘুকোণ ∴ চগ > চছ (১। ১৯)। চগ = চখ ∴ চখ > চছ, ইহা অসাধ্য (১। ৯ স্ব. সা.) ∴ চছ ⊥ ঘঙ নহে, এবং চগ ভিন্ন অন্য কোন রেখাও নহে।

PROP. XIX. THEOR.

If a straight line touch a circle, and from the point of contact a straight line be drawn at right angles to the touching line; the centre of the circle is in that line.

Let the straight line DE touch the circle ABC, in C, and from C let CA be drawn at right angles to DE; the centre of the circle is in CA.

For, if not, let F be the centre, if possible, and join CF: Because DE touches the circle ABC, and FC is drawn from the centre to the point of contact, FC is perpendicular (18. 3.) to DE; therefore FCE is a right angle: But ACE is also a right angle; therefore the angle FCE is equal to the angle ACE, the less to the greater, which is impossible: Wherefore F is not the centre of the circle ABC: In the same manner, it may be shown, that no other point which is not in CA, is the centre; that is, the centre is in CA. Therefore, "*if a straight line,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If the centre be not in AC, let it be at F. ∴ FC is ⊥ to DE (18. 3.) and ∠FCE is a Rt. ∠. But AC is ⊥ to DE (Hyp.) ∴ ∠ACE is a Rt. ∠ ∴ ∠FCE = ∠ACE which is impossible. ∴ the centre is not at F nor any where else but in AC.

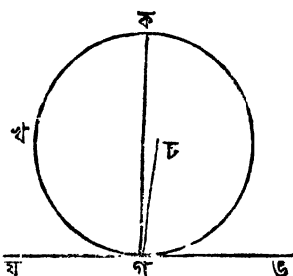
PROP. XX. THEOR.

The angle at the centre of a circle is double the angle at the circumference, upon the same base, that is, upon the same part of the circumference.

Let ABC be a circle, and BDC an angle at the centre, and BAC an angle at the circumference which

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিলে স্পর্শ চিহ্ন হইতে যদি স্পর্শক রেখার লম্ব টানা যায় তবে ঐ লম্বের মধ্যে কেন্দ্র থাকিবে।

ঘঙ সরল রেখা কখগ বৃত্তকে গ বিন্দুতে স্পর্শ করুক। পরে গ হইতে কগ রেখা ঘঙ রেখার লম্ব করিয়া টান। কগ রেখার মধ্যে বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে।

যদি কগ রেখাতে কেন্দ্র না থাকে তবে অন্যত্র যথা চ কেন্দ্র করিয়া চ গ সংযুক্ত কর। ঘঙ কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং কেন্দ্র হইতে স্পর্শ চিহ্ন পর্য্যন্ত চগ টানা গিয়াছে একারণ (৩। ১৮) চগ ঘঙ রেখার লম্ব, সুতরাং চগঙ এক সমকোণ, কিন্তু কগঙও সমকোণ, তন্নিমিত্তে চগঙ কগঙ সমান, ইহা অসাধ্য, কেননা চগঙ লঘুতর, সুতরাং চ কখগ বৃত্তের কেন্দ্র নহে। এইরূপে উপপন্ন হইতে পারে যে কগ রেখাস্থ না হইলে কোন বিন্দু কেন্দ্র হইতে পারে না অর্থাৎ কগ রেখাতেই কেন্দ্র আছে। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

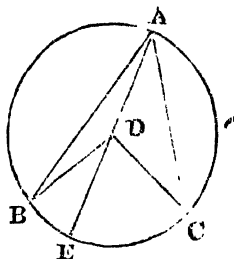
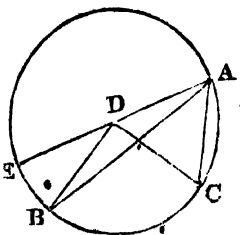
সং উ.। যদি কগ রেখাতে কেন্দ্র না থাকে তবে চ কেন্দ্র হউক ∵ চগ ⊥ ঘঙ (৩। ১৮) এবং ∠চগঙ এক সম ∠। অপর কগ ⊥ ঘঙ (কল্পনা) ∴ ∠কগঙ এক সম ∠ ∴ ∠চগঙ = ∠কগঙ, ইহা অসাধ্য, ∴ চ কেন্দ্র নহে এবং কগ ভিন্ন অন্যত্র কেন্দ্র হইতে পারে না।

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক ভূমির উপর অর্থাৎ পরিধির এক অংশের উপর বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

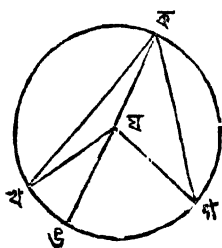
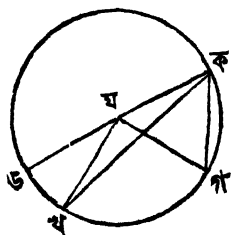
কখগ এক বৃত্ত, খঘগ কেন্দ্রস্থ এক কোণ এবং খকগ পরিধিস্থ

have the same circumference, BC for their base ; the angle BDC is double of the angle BAC.

First, Let D, the centre of the circle, be *within* the angle BAC, and join AD, and produce it to E : Because DA is equal to DB, the angle DAB is equal (5. 1.) to the angle DBA ; therefore the angles DAB, DBA taken together, are double of the angle DAB ; but the angle BDE is equal (32. 1.) to the angles DAB, DBA ; therefore also, the angle BDE is double of the angle DAB : For the same reason, the angle EDC is double of the angle DAC : Therefore the whole angle BDC is double of the whole angle BAC.

Again, Let D, the centre of the circle, be *without* the angle BAC, and join AD and produce it to E. It may be demonstrated, as in the first case, that the angle EDC is double of the angle DAC, and that EDB, a part of the first, is double of DAB, a part of the other ; therefore the remaining angle BDC is double of the remaining angle BAC. Therefore, "*the angle at the centre*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. First Case. DA = DB ∴ ∠DAB = ∠DBA (5. 1.) ∴ ∠DAB + ∠DBA = 2 ∠DAB ∴ ∠BDE = ∠DAB + ∠DBA (32. 1.) = 2 DAB. Similarly ∠EDC = 2 ∠DAC ∴ ∠BDC = 2 ∠BAC.

Second Case. It may be shown as before that ∠EDC = 2 ∠EAC and ∠EDB = 2 ∠EAB ∴ ∠BDC = 2 ∠BAC (3. Ax. 1.)

এক কোণ, উভয়েরি ভূমি এক পরিধি খগ। খঘগ কোণ খকগ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

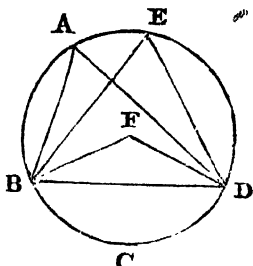
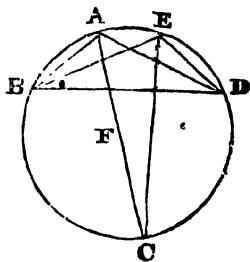
প্রথমতঃ, বৃত্তের কেন্দ্র ঘ যেন খকগ কোণের মধ্যে আছে। ক ঘ সংযুক্ত করিয়া ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। ঘক ঘখ সমান একারণ (১। ৫) ঘকখ কোণ ঘখক সমান, এবং ঘকখ ও ঘখক দুই কোণ একত্র ঘকখ কোণের দ্বিগুণ। অপর (১। ৩২) খঘঙ কোণ ঘকখ ও ঘখক উভয়ের যোগ তুল্য সুতরাং খঘঙ কোণও ঘকখ কোণের দ্বিগুণ। ঐ কারণে গঘঙ কোণও গকঙ কোণের দ্বিগুণ, সুতরাং সমুদয় গঘখ কোণ খকগ কোণের দ্বিগুণ।

দ্বিতীয়তঃ, বৃত্তের কেন্দ্র ঘ যেন খকগ কোণের বাহিরে আছে, ক ঘ সংযুক্ত করিয়া ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। ইহাতে পূর্ব্ববৎ উপপন্ন হইতে পারে যে গঘঙ কোণ গকঘ কোণের দ্বিগুণ এবং প্রথমোক্তের একাংশ খঘঙ দ্বিতীয়োক্তের একাংশ খকঘ কোণের দ্বিগুণ সুতরাং অবশিষ্ট গঘখও গকখ কোণের দ্বিগুণ। অতএব এক ভূমির উপর, ইত্যাদি।

সং উ, প্রথমতঃ। ঘক = ঘখ ∴ ∠ঘকখ = ∠ঘখক (১। ৫), ∴ ∠ঘকখ + ∠ঘখক = ২ ∠ঘকখ ∴ ∠ঙঘখ = ∠ঘকখ + ∠ঘখক (১। ৩২) = ২∠ঘকখ। তদ্রূপ ∠ঙঘগ = ২∠ঘকগ ∴ ∠খঘগ = ২ ∠খকগ।

দ্বিতীয়তঃ। পূর্ব্ববৎ দর্শিত হইতে পারে যে ∠ঙঘগ = ২∠ঙকগ এবং ∠ঙঘখ = ২∠ঙকখ ∴ ∠খঘগ = ২∠খকগ (১। ৩ স্ব. সা.)।

PROP. XXI. THEOR.

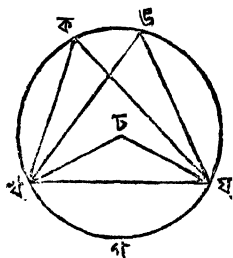
The angles in the same segment of a circle are equal to one another.

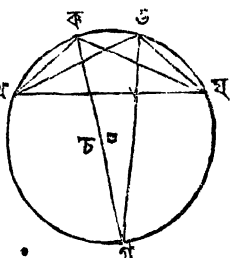
Let ABCD be a circle, and BAD, BED, angles in the same segment BAED: The angles BAD, BED are equal to one another.

Take F the centre of the circle ABCD: And, first, let the segment BAED be greater than a semicircle, and join BF, FD: And because the angle BFD is at the centre, and the angle BAD at the circumference, both having the same part of the circumference, viz. BCD, for their base; therefore the angle BFD is double (20. 3.) of the angle BAD: for the same reason, the angle BFD is double of the angle BED: Therefore the angle BAD is equal to the angle BED.

But, if the segment BAED be not greater than a semicircle, let BAD, BED be angles in it; these also are equal to one another. Draw AF to the centre, and produce it to C, and join CE: Therefore the segment BADC is greater than a semicircle; and the angles in it, BAC, BEC are equal, by the first case: For the same reason, because CBED is greater than a semicircle, the angles CAD, CED are equal: therefore the whole angle BAD is equal to the whole angle BED. Wherefore, "*the angles in the same segment,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. First Case. $\angle$BFD = 2 $\angle$BAD (20. 3.) $\angle$BFD = 2$\angle$BED $\therefore$ $\angle$BAD = $\angle$BED (7. Ax. 1.)

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

এক বৃত্তখণ্ডের মধ্যে যত কোণ থাকে সকলি পরস্পর সমান।

কখগঘ এক বৃত্ত, তাহার এক খণ্ড খকঙঘ মধ্যে খকঘ ও খঙঘ দুই কোণ আছে, এই দুই কোণ পরস্পর সমান হইবে।

কখগঘ বৃত্তের চ কেন্দ্র নির্ণয় কর। প্রথমতঃ, খকঙঘ খণ্ড অর্দ্ধ বৃত্তের অধিক হউক, তাহাতে চ খ ও চ ঘ সংযুক্ত কর। এস্থলে কেন্দ্রস্থ খচঘ কোণ ও পরিধিস্থ খকঘ কোণ উভয়ের ভূমি পরিধির এক অংশ অর্থাৎ খগঘ, সুতরাং (৩.২০) খচঘ কোণ খকঘ কোণের দ্বিগুণ। ঐ কারণে খচঘ কোণ খঙঘ কোণেরও দ্বিগুণ। অতএব খকঘ ও খঙঘ পরস্পর সমান।

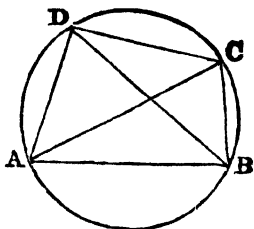
দ্বিতীয়তঃ, খকঙঘ খণ্ড যদি অর্দ্ধ বৃত্তের অধিক না হয় আর তাহাতে যদি খকঘ ও খঙঘ দুই কোণ থাকে তবে ইহারাও সমান হইবে কচ কেন্দ্র পর্য্যন্ত টানিয়া গ. পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর ও গ ঙ সংযুক্ত কর, সুতরাং খকঘগ খণ্ড অর্দ্ধবৃত্তের অধিক হইবে, এবং তত্রস্থ দুই কোণ খকগ খঙগ প্রথম ধারানুসারে সমান হইবে। ঐ কারণে গখঙঘ অর্দ্ধ বৃত্তের অধিক হওয়াতে গকঘ গঙঘ কোণ সমান হইবে, অতএব সমুদয় খকঘ ও খঙঘ কোণ পরস্পর সমান। এই রূপে এক বৃত্তখণ্ডের, ইত্যাদি।

• সং উ.। প্রথমতঃ, ∠খচঘ = ২∠খকঘ (৩। ২০), ∠খচঘ = ২∠খঙঘ ∴ ∠খকঘ = ∠খঙঘ (১। ৭ স্ব. সা.)।

Second Case. $\angle BAC = \angle BEC$ (by the first case) $\angle CAD = \angle CED$ (by the same) $\therefore \angle BAC + \angle CAD$ or the whole $\angle BAD = \angle BEC + \angle CED$ or the whole $\angle BED$.

PROP. XXII. THEOR.

The opposite angles of any quadrilateral figure described in a circle, are together equal to two right angles.

Let ABCD be a quadrilaterial figure in the circle ABCD; any two of its opposite angles are together equal to two right angles.

Join AC, BD. The angle CAB is equal (21. 3.) to the angle CDB, because they are in the same segment BADC, and the angle ACB is equal to the angle ADB, because they are in the same segment ADCB; therefore the whole angle ADC is equal to the angles CAB, ACB: To each of these equals add the angle ABC; and the angles ABC, ADC, are equal to the angles ABC, CAB, BCA. But ABC, CAB, BCA are equal to two right angles: therefore also the angles ABC, ADC are equal to two right angles: In the same manner, the angles BAD, DCB may be shown to be equal to two right angles. Therefore "*the opposite angles,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. $\angle BDC = \angle BAC$ (21. 3.) $\angle ADB = \angle ACB$ (21. 3.) $\therefore \angle ADC = \angle BAC + \angle ACB \therefore \angle ADC + \angle ABC = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 2$ Rt. $\angle$s (32. 1.)

PROP. XXIII. THEOR.

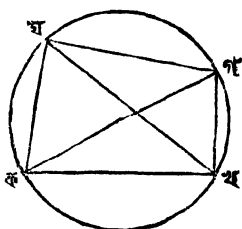
Upon the same straight line, and upon the same side of it, there cannot be two similar segments of circles, not coinciding with one another.

If it be possible, let the two similar segments of circles, viz. ACB, ADB, be upon the same side of the

দ্বিতীয়তঃ, ∠খকগ = ∠খঙগ (যথা প্রথম ধারা) ∠গকঘ ∠গঙঘ (ঐ) ∴ ∠খকঘ = ∠খঙঘ।

২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

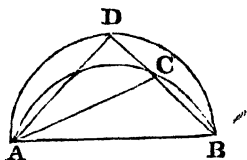
বৃত্তের মধ্যে কোন চতুর্ভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত হইলে তাহার সম্মুখস্থ কোণদ্বয় একত্র দুই সমকোণ তুল্য হইবে।

কখগঘ বৃত্তের মধ্যে কখগঘ এক চতুর্ভুজ ক্ষেত্র, ইহার সম্মুখস্থ যে দুই কোণ লও একত্র দুই সমকোণ তুল্য হইবে।

ক গ ও খ ঘ সংযুক্ত কর। গকখ কোণ গঘখ সমান কেননা তাহারা এক বৃত্তখণ্ড খকঘগ মধ্যে আছে (৩। ২১), এবং কগখ কোণ কঘখ সমান কেননা তাহারাও এক খণ্ড কঘগখ মধ্যে আছে, সুতরাং সমুদয় কঘগ কোণ গকখ ও কগখ দুই কোণের তুল্য; আর উভয়ে কখগ কোণ যোগ করিলে কখগও কঘগ দুই কোণ একত্র কখগ, গকখ ও খগক কোণের তুল্য। অপর (১। ৩২) কখগ, গকখ, ও খগক একত্র দুই সমকোণ তুল্য, সুতরাং কখগ ও কঘগ কোণও একত্র দুই সমকোণ তুল্য। এই রূপে খকঘ ও ঘগখ কোণও দুই সমকোণ তুল্য উপপন্ন হইতে পারে। অতএব বৃত্তের মধ্যে, ইত্যাদি।

সং উ.। ∠খঘগ = ∠খকগ (৩। ২১) ∠কঘখ = ∠কগখ (৩। ২১) ∴ ∠কঘগ = ∠খকগ + ∠কগখ ∴ ∠কঘগ + ∠কখগ = ∠খকগ + ∠কগখ + ∠কখগ = ২সম ∠ (১। ৩২)।

২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

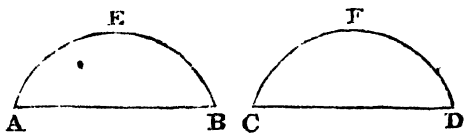
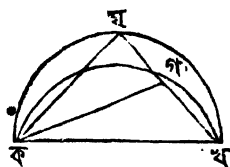
এক সরল রেখার উপর এক পার্শ্বে দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড পরস্পর না মিলিয়া থাকিতে পারে না।

same straight line AB, not coinciding with one another: then, because the circles ACB, ADB, cut one another in the two points A, B, they cannot cut one another in in any other point (10. 3.): one of the segments must therefore fall within the other: let ACB fall within ADB, draw the straight line BCD and join CA, DA: and because the segment ACB is similar to the segment ADB, and similar segments of circles contain (9. def. 3.) equal angles, the angle ACB is equal to the angle ADB, the exterior to the interior, which is impossible (16. 1.). Therefore, "*there cannot be two similar segments of circles upon the same side of the same line, which do not coincide.*" Q. E. D.

Sym. Dem. If possible, then one of them must fall within the other. ∠ADB = ∠ACB (9. Def. 3.) but ∠ACB ⁊ ∠ADC (16. 1.) which is absurd.

PROP. XXIV. THEOR.

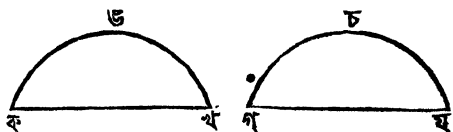
Similar segments of circles upon equal straight lines are equal to one another.

Let AEB, CFD be similar segments of circles upon the equal straight lines AB, CD; the segment AEB is equal to the segment CFD.

For, if the segment AEB be applied to the segment CFD, so that the point A may be on C, and the straight line AB upon CD, the point B will coincide with the point D, because AB is equal to CD: Therefore the straight line AB coinciding with CD, the segment AEB must

যদি স্যাৎ পারে তবে কখ সরল রেখার উপর এক পার্শ্বে কগখ ও কঘখ দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড পরস্পর না মিলিয়া থাকুক, তাহাতে কগখ ও কঘখ বৃত্ত ক ও খ বিন্দুতে পরস্পরকে ছিন্ন করিতেছে একারণ (৩। ১০) আর কোন বিন্দুতে ছিন্ন করিতে পারে না সুতরাং এক খণ্ড অন্য খণ্ডের মধ্যে পড়িবে। কগখ যেন কঘখ মধ্যে পড়িতেছে, পরে খগঘ সরল রেখা টান ও কগ, এবং ক ঘ সংযুক্ত কর। অপর কগখও কঘখ দুই সদৃশ খণ্ড সুতরাং সদৃশ বৃত্ত খণ্ডস্থ কোণ সমূহ সমান হওয়াতে (৩। ৯ সং) কগখ কোণ কঘখ কোণের সমান, কিন্তু (১। ১৬) ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তরস্থের সমান হইতে পারেনা, অতএব এক রেখার উপর এক পার্শ্বে দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড না মিলিয়া থাকিতে পারে না।

সং উ.। যদিস্যাৎ সাধ্য হয় তবে একটী অন্যটীর মধ্যে পড়িবে। ∠কঘখ = ∠কগখ (৩। ৯ স্ব. সা.) কিন্তু ∠কগখ > ∠কঘখ (১। ১৬) ইহা অসাধ্য।

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান২ সরল রেখার উপর সদৃশ বৃত্তখণ্ড থাকিলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

কখ, ও গঘ সমান২ সরলরেখার উপর কঙখ ও গচঘ দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড হউক। কঙখ খণ্ড গচঘ সমান হইবে।

কেননা যদি কঙখ খণ্ড গচঘ খণ্ডের উপর এমত প্রকারে রাখা যায় যে ক গ বিন্দুর উপর এবং কখ রেখা গঘ রেখার উপর পড়ে তবে কখ গঘ সমান. হওয়াতে খ ঘ বিন্দুর উপর পড়িবে, সুতরাং

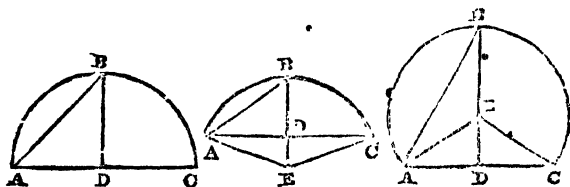
(23. 3.) coincide with the segment CFD, and therefore is equal to it. Wherefore, "*similar segments*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If segment AEB be applied to CFD so that A may be on C and AB on CD, B must coincide with D ∵ AB = CD. ∴ AEB must coincide with CFD (23. 3) ∴ AEB = CFD.

PROP. XXV. PROB.

A segment of a circle being given, to describe the circle of which it is a segment.

Let ABC be the given segment of a circle; it is required to describe the circle of which it is a segment.

Bisect (10. 1.) AC in D, and from the point D draw (11. 1.) DB at right angles to AC, and join AB; First, Let the angles ABD, BAD be equal to one another; then the straight line BD is equal (6. 1.) to DA, and therefore to DC; and because the three straight lines DA, DB, DC, are all equal, D is the centre of the circle (9. 3); from the centre D, at the distance of any of the three DA, DB, DC, describe a circle; this shall pass

through the other points; wherefore the circle of which ABC is a segment is described: and because the centre D is in AC, the segment ABC, is a semicircle. Next, Let the angles ABD, BAD be unequal; at the point A, in the straight line AB, make (23. 1.) the angle BAE equal to the angle ABD, and produce BD, if necessary, to E, and join EC: and because the angle ABE is equal to the angle BAE, the straight line BE

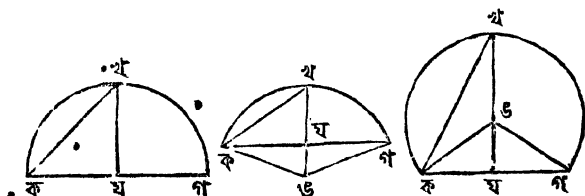
কখ সরল রেখা গঘ সহিত মিলিলে কঙখ খণ্ড গচঘ সহিত না মিলিয়া থাকিতে পারিবে না (৩। ২৩) একারণ ইহারা সমান। অতএব সমান২ সরল রেখার, ইত্যাদি।

সং উ.। যদি কঙখ খণ্ড গচঘ খণ্ডের উপর এমত করিয়া রাখা যায় যে ক গ উপর ও কখ গঘ উপর পড়ে তবে খ ঘ উপর পড়িবে ∵ কখ = গঘ ∴ কঙখ অবশ্য গচঘ সহিত মিলিবে (৩। ২৩) ∴ কঙখ = গচঘ।

২৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক বৃত্তখণ্ড নির্দ্দিষ্ট হইলে সে যে বৃত্তের খণ্ড তাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড, ইহা যে বৃত্তের খণ্ড তাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

কগ ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (১। ১০), এবং ঘ হইতে খঘ (১। ১১) কগ উপর লম্ব ভাবে টানিয়া ক খ সংযুক্ত কর। প্রথমতঃ যেন কখঘ ও খকঘ দুই কোণ পরস্পর সমান হউক তাহাতে (১। ৬) কঘ ও খঘ সমান হইবে সুতরাং খঘ গঘও

সমান হইবে, এবং খঘ, কঘ, গঘ, তিন রেখা সমান হওয়াতে (৩। ৯) ঘ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে, এবং ঘ হইতে এই তিনের কোন রেখা পর্য্যন্ত বৃত্ত আঁকিলে অন্যান্য বিন্দু দিয়া যাইবে সুতরাং কখগ যে বৃত্তের খণ্ড তাহা এইরূপে অঙ্কিত হইল, আর কগ মধ্যে কেন্দ্র থাকাতে কখগ খণ্ড অর্দ্ধ বৃত্ত হইবে। দ্বিতীয়তঃ কখঘ ও ঘকখ দুই কোণ যেন অসমান হউক, পরে কগ রেখার ক বিন্দুতে কখঘ সমান করিয়া খকঙ কোণ অঙ্কিত কর

is equal (6. 1.) to EA: and because AD is equal to DC, and DE common to the triangles ADE, CDE, the two sides AD, DE are equal to the two CD, DE, each to each; and the angle ADE is equal to the angle CDE, for each of them is a right angle; therefore the base AE is equal (4. 1.) to the base EC: but AE was shown to be equal to EB, wherefore also BE is equal to EC: and the three straight lines AE, EB, EC, are therefore equal to one another; wherefore (9. 3.) E is the centre of the circle. From the centre E, at the distance of any of the three AE, EB, EC, describe a circle: this shall pass through the other points; and thus the circle of which ABC is a segment is described: also, it is evident, that if the angle ABD be greater than the angle BAD, the centre E falls without the segment ABC, which therefore is less than a semicircle; but if the angle ABD be less than BAD, the centre E falls within the segment ABC, which is therefore greater than a semicircle: Wherefore, a segment of a circle being given, the circle is described of which it is a segment. *Which was to be done.*

Sym. Dem. First Case. ∠ABD = ∠DAB ∴ AD = DB (6. 1.) AD = DC (by constr.) ∴ BD = DC = AD ∴ D is the centre of the ⊙ required (9. 3.)

Second Case. ∠ABE = ∠BAE ∴ AE = BE (6. 1.) And AD = DC (by constr.), DE common to △s ADE and EDC, and ∠ADE = ∠EDC (being Rt. ∠s) ∴ (4. 1.) AE = EC = EB ∴ E is the centre of the ⊙ required.

PROP. XXVI. THEOR.

In equal circles, equal angles stand upon equal arches, whether they be at the centres or circumferences.

Let ABC, DEF be equal circles, and the equal angles BGC, EHF at their centres, and BAC, EDF at their circumferences: the arch BKC is equal to the arch ELF.

(১। ২৩), এবং প্রয়োজন থাকিলে খঙ ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর, ও ঙ গ সংযুক্ত কর। অনন্তর কখঘ কোণ খকঙ সমান হওয়াতে খঙ ও কঙ সমান (১। ৬) আর কঘ গঘ সমান, এবং ঘঙ কঘঙ ও গঘঙ উভয় ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং কঘঙ কোণ গঘঙ সমান, কেননা ইহারা প্রত্যেকে সমকোণ, একারণ (১। ৪) কঙ ভূমি গঙ সমান। কিন্তু কঙ খঙ সমান দর্শিত হইতেছে সুতরাং খঙ গঙ সমান. এবং কঙ, খঙ, গঙ, এই তিন রেখা পরস্পর সমান অতএব ঙ(৩। ৯) বৃত্তের কেন্দ্র হইবে এবং ঙ কেন্দ্র হইতে কঙ, খঙ, গঙ, এই তিনের কোন রেখা পর্য্যন্ত বৃত্ত আঁকিলে অন্যান্য বিন্দু দিয়া যাইবে এবং যে বৃত্তের খণ্ড কখগ তাহা এই রূপে অঙ্কিত হইল। আর স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে কখঘ কোণ খকঘ কোণের অধিক হইলে ঙ বিন্দু খণ্ডের বাহিরে পড়িবে সুতরাং এখণ্ড অর্দ্ধবৃত্ত হইতে ন্যূন কিন্তু কখঘ কোণ খকঘ কোণের ন্যূন হইলে ঙ বিন্দু খণ্ডের মধ্যে পড়িবে এবং এ খণ্ড তখন অর্দ্ধবৃত্ত হইতে অধিক হইবে। অতএব এক বৃত্তখণ্ড নির্দ্দিষ্ট হওয়াতে সে যে বৃত্তের খণ্ড তাহা অঙ্কিত হইল, ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

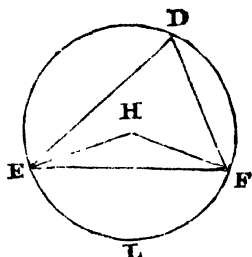
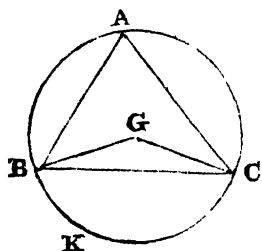
সং উ। প্রথমতঃ $\angle$ কখঘ $=$ $\angle$ ঘকখ $\therefore$ কঘ $=$ ঘখ (১। ৬) কঘ $=$ ঘগ (অঙ্কপাত) $\therefore$ খঘ $=$ ঘগ $=$ কঘ $\therefore$ ঘ অভীষ্ট $\odot$ কেন্দ্র (৩। ৯)।

দ্বিতীয়তঃ $\angle$কখঙ $=$ $\angle$খকঙ $\therefore$ কঙ $=$ খঙ (১। ৬)। অপর কঘ $=$ ঘগ (অঙ্কপাত) ঘঙ কঘঙ ও ঙঘগ ত্রিভুজের সামান্য বাহু এবং $\angle$কঘঙ $=$ $\angle$ঙঘগ (কেননা সমকোণ) $\therefore$ (১। ৪) কঙ $=$ ঙগ $\therefore$ ঙ অভীষ্ট $\odot$ কেন্দ্র।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান২ বৃত্তেতে সমান২ কোণ, কেন্দ্রস্থ হউক বা পরিধিস্থ হউক, সমান২ চাপের উপর থাকিবে।

কখগ ঘঙচ সমান২ বৃত্ত, এবং খছগ, ঙজচ কেন্দ্রস্থ সমান২ কোণ, ও খকগ, ঙঘচ পরিধিস্থ সমান২ কোণ কল্পনা কর, তাহাতে খটগ চাপ ঙঠচ চাপের সমান হইবে।

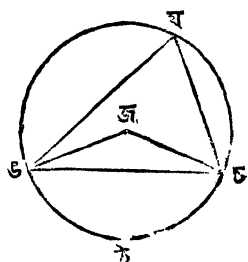
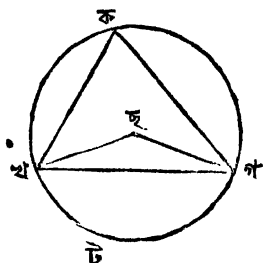
Join BC, EF; and because the circles ABC, DEF are equal, the straight lines drawn from their centres are equal; therefore the two sides BG, GC, are equal to the two EH, HF; and the angle at G is equal to

the angle at H; therefore the base BC is equal (4. 1.) to the base EF: and because the angle at A is equal to the angle at D, the segment BAC is similar (9. def. 3.) to the segment EDF; and they are upon equal straight lines BC, EF; but similar segments of circles upon equal straight lines are equal (24. 3.) to one another; therefore the segment BAC is equal to the segment EDF: but the whole circle ABC is equal to the whole DEF; therefore the remaining segment BKC is equal to the remaining segment ELF, and the arch BKC to the arch ELF. Wherefore, "*in equal circles*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. ⊙ABC = ⊙DEF (Hyp.) ∴ BG = EH and GC = HF. ∠G = ∠H (Hyp.) ∴ (4. 1.) BC = EF. ∠A = ∠D (Hyp.) ∴ seg. BAC is similar to seg. EDF (9. Def. 3.) ∴ seg. BAC = seg. EDF (24. 3.) ∴ ⊙ABC — seg BAC = ⊙DEF — seg. EDF, or arc BKC = arc ELF.

PROP. XXVII. THEOR.

In equal circles, the angles which stand upon equal arches are equal to one another, whether they be at the centres or circumferences.

Let the angles BGC, EHF at the centres, and BAC,

খ গ এবং ঙ চ সংযুক্ত কর। কখগ ঘঙচ দুই বৃত্ত সমান হওয়াতে তাহাদের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত রেখাও সমান হইবে একারণ খছ, গছ দুই বাহু ঙজ, জচ সমান এবং ছ কোণও

জ সহিত সমান, সুতরাং (১। ৪) খগ ভূমিও ঙচ সমান অপর ক কোণ ঘ কোণ সমান হওয়াতে খকগ খণ্ড ঙঘচ খণ্ডের সমান (৩। ৯ সং)। আর ইহারা খগ, ঙচ সমান২ রেখার উপর আছে, এবং সদৃশ বৃত্তখণ্ড সমান২ সরল রেখার উপরিস্থ হইলে সমান হয় (৩। ২৪), সুতরাং খকগ খণ্ড ঙঘচ খণ্ডের সমান। আর সমুদয় বৃত্ত কখগ সমুদয় ঘঙচ সমান এবং খকগ খণ্ড ঙঘচ খণ্ডের সমান সুতরাং অবশিষ্ট খণ্ড খটগও ঙঠচ সমান হইবে, এবং খটগ চাপ ঙঠচ চাপের সমান হইবে। অতএব সমান২ বৃত্তের, ইত্যাদি।

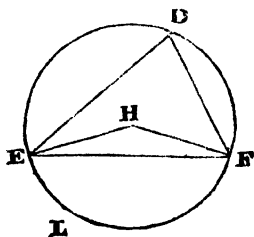
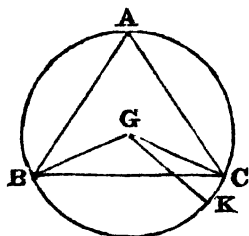
সং উ। কখগ⊙ = ঘঙচ⊙ (কল্পনা) ∴ খছ = ঙজ এবং ছগ = জচ এবং ∠ছ = ∠জ (কল্পনা) ∴ (১। ৪) খগ = ঙচ। ∠ক = ∠ঘ (কল্পনা) ∴ খকগ খণ্ড ঙঘচ খণ্ডের সদৃশ (৩। ৯ সং) ∵ খকগ খণ্ড = ঙঘচ খণ্ড (৩। ২৪) ∴ কখগ ⊙ — খকগ খণ্ড = ঘঙচ ⊙ — ঙঘচ খণ্ড অর্থাৎ খটগ চাপ = ঙঠচ চাপ।

২৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান২ বৃত্তেতে সমান২ চাপের উপরিস্থ কোণ কেন্দ্রেতেই হউক কিম্বা পরিধিতেই হউক পরস্পর সমান হইবে।

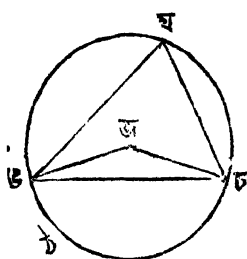
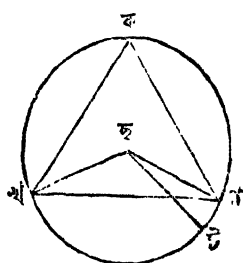
কখগ, ঘঙচ সমান২ বৃত্ত, ইহাদের কেন্দ্রস্থ কোণ খছগ ও

EDF at the circumferences of the equal circles ABC, DEF, stand upon the equal arches BC, EF; the angle BGC is equal to the angle EHF, and the angle BAC to the angle EDF.

If the angle BGC be equal to the angle EHF, it is manifest (20. 3.), that the angle BAC is also equal to EDF. But, if not, one of them is the greater: let BGC be the greater, and at the point G, in the straight line BG, make the angle (23. 1.) BGK equal to the angle EHF. And because equal angles stand upon equal arches (26. 3.), when they are at the centre, the arch BK is equal to the arch EF: but EF is equal to BC; therefore also BK is equal to BC, the less to the greater, which is impossible. Therefore the angle BGC is not unequal to the angle EHF; that

is, it is equal to it: and the angle at A is half the angle BGC, and the angle at D half the angle EHF: therefore the angle at A is equal to the angle at D. Wherefore, "*in equal circles*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. If $\angle$BGC $\neq$ $\angle$EHF, let $\angle$BGK = EHF $\therefore$ arc BK = arc EF (26. 3.) But arc BC = EF (Hyp.) $\therefore$ arc BK = arc BC which is impossible (9. Ax. 1.) $\therefore$ $\angle$BGC = $\angle$EHF. $\angle$BAC = $\frac{1}{2}$ $\angle$BGC and $\angle$EDF = $\frac{1}{2}$ $\angle$EHF (20. 3.) $\therefore$ $\angle$BAC = $\angle$EDF.

ঙজচ, এবং পরিধিস্থ কোণ খকগ ও ঙঘচ, খগ ও ঙচ সমান২ চাপের উপরিস্থ হউক, তাহাতে খছগ কোণ ঙজচ কোণের সমান হইবে এবং খকগ কোণ ঙঘচ সমান হইবে।

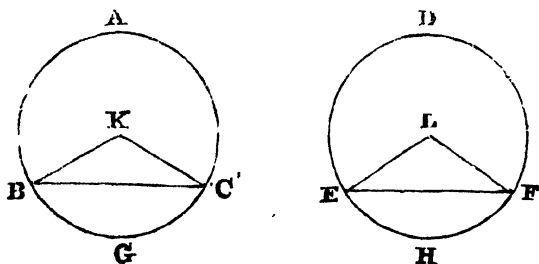
খছগ কোণ যদি ঙজচ কোণের সমান হয় তবে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে (৩।২০) খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান হইবে। যদি তাহা না হয় তবে একটী অন্যাপেক্ষা অধিক হইবে, খছগ যেন অধিক, পরে খছ রেখার ছ বিন্দুতে খছট কোণ ঙজচ সমান কর (১। ২০), এবং সমান২ কোণ সমান২ চাপের উপর থাকাতে (৩। ২৬) খট চাপ ঙচ চাপের সমান। কিন্তু ঙচ খগ সমান, সুতরাং খট ও খগ সমান, ইহা অসাধ্য কেননা খট লঘুতর, অতএব খছগ কোণ ঙজচ কোণের

অসমান নহে অর্থাৎ ইহারা সমান। অনন্তর ক কোণ খছগ কোণের অর্দ্ধ এবং ঘ কোণ ঙজচ কোণের অর্দ্ধ সুতরাং ক কোণ ও ঘ কোণ পরস্পর সমান। অতএব সমান২ বৃত্তেতে, ইত্যাদি।

সং উ। যদি ∠খছগ ≠ ∠ঙজচ তবে ∠খছট = ঙজচ হউক ∴ খট চাপ = ঙচ চাপ (৩। ২৬) কিন্তু খগ চাপ = ঙচ (কল্পনা) ∴ খট চাপ = খগ চাপ, ইহা অসাধ্য (১। ৯ স্ব. সা.) ∴ ∠খছগ = ∠ঙজচ। ∠খকগ = ½∠খছগ এবং ∠ঙঘচ = ½∠ঙজচ (৩। ২০) ∴ ∠খকগ = ∠ঙঘচ।

PROP. XXVIII. THEOR.

In equal circles, equal straight lines cut off equal arches, the greater equal to the greater, and the less to the less.

Let ABC, DEF be equal circles, and BC, EF equal straight lines in them, which cut off the two greater arches BAC, EDF, and the two less BGC, EHF: the greater BAC is equal to the greater EDF, and the less BGC to the less EHF.

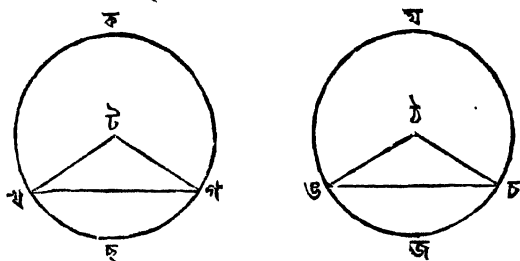
Take (1. 3.) K, L, the centres of the circles, and join BK, KC, EL, LF: and because the circles are equal, the straight lines from their centres are equal;

therefore BK, KC are equal to EL, LF; but the base BC is also equal to the base EF: therefore the angle BKC is equal (8. 1.) to the angle ELF: and equal angles stand upon equal (26. 3.) arches, when they are at the centres: therefore the arch BGC is equal to the arch EHF. But the whole circle ABC is equal to the whole EDF: the remaining part therefore, of the circumference, viz. BAC, is equal to the remaining part EDF. Therefore, "*in equal circles,*" &c. Q. E. D.

Sym. Dem. ⊙ABC = ⊙DEF (Hyp.) ∴ BK = EL, and KC = LF. And BC = EF (Hyp.) ∴ ∠BKC = ∠ELF (8. 1.) ∴ arc BGC = arc EHF (26. 3.) ∴ ⊙ABC—arc BGC = ⊙DEF—arc EHF, that is arc BAC = arc EDF.

২৮ প্রতিজ্ঞা উপপাদ্য।

সমান২ বৃত্তেতে সমান২ সরল রেখা সমান২ চাপ ছেদ করে, তাহাতে বৃহত্তর বৃহত্তরের, ও লঘুতর লঘুতরের সমান হয়।

কখগ, ঘঙচ দুই সমান২ বৃত্ত, এবং খগ, ঙচ তাহাদের মধ্যে দুই সমান২ সরল রেখা খকগ ও ঙঘচ দুই বৃহত্তর খণ্ড এবং খছগ ও ঙজচ দুই লঘুতর খণ্ড ছেদ করিতেছে। খকগ বৃহত্তর খণ্ড ঙঘচ বৃহত্তরের সমান, এবং খছগ লঘুতর খণ্ড ঙজচ লঘুতরের সমান হইবে।

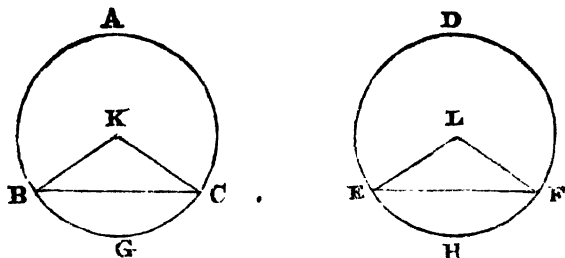
দুই বৃত্তের কেন্দ্র ট, ঠ, নির্ণয় কর পরে খট, গট, ঠচ ঙঠ, রেখা টান। দুই বৃত্ত সমান হওয়াতে তাহাদের কেন্দ্র হইতে

অঙ্কিত রেখাও সমান হইবে একারণ খট ও টগ, ঙঠ ও ঠচ সমান এবং খগ ভূমিও ঙচ সমান, তন্নিমিত্তে (১। ৮) খটগ কোণ ঙঠচ কোণের সমান। আর কেন্দ্রস্থ কোণ সমান হইলে সমান২ চাপের উপরিস্থ হয় (৩। ৬) সুতরাং খছগ চাপ ঙজচ চাপের সমান। অপর সমুদয় কখগ ঘঙচ সমান, একারণ পরিধিস্থ অবশিষ্ট খকগ চাপও ঙঘচ চাপের সমান হইবে। অতএব সমান২ বৃত্তেতে, ইত্যাদি।

সং উ। কখগ ⊙ = ঘঙচ ⊙ (কল্পনা) ∴ খট = ঙঠ, এবং টগ = ঠচ। অপর খগ = ঙচ (কল্পনা) ∴ ∠ খটগ = ∠ ঙঠচ (১। ৮) ∴ খছগ চাপ = ঙজচ চাপ (৩। ২২) ∴ কখগ ⊙ — খছগ চাপ = ঘঙচ ⊙ — ঙজচ চাপ, অর্থাৎ খকগ চাপ = ঙঘচ চাপ।

PROP. XXIX. THEOR.

In equal circles equal arches are subtended by equal straight lines.

Let ABC, DEF be equal circles, and let the arches BGC, EHF also be equal; and join BC, EF: the straight line BC is equal to the straight line EF.

Take (1. 3.) K, L, the centres of the circles, and join BK, KC, EL, LF; and because the arch BGC is equal to the arch EHF, the angle BKC is equal (27. 3.) to the angle ELF: also because the circles ABC, DEF are equal, their radii are equal: therefore BK,

KC are equal to EL, LF; and they contain equal angles: therefore the base BC is equal (4. 1.) to the base EF. Therefore, "*in equal circles*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. Arc BGC = arc EHF (Hyp.) ∴ ∠BKC = ∠ELF (27. 3.) and ⊙ABC = ⊙DEF (Hyp.) ∴ BK = EL, KC = LF, ∴ (4. 1.) BC = EF.

PROP. XXX. PROB.

To bisect a given arch, that is, to divide it into two equal parts.

Let ADB be the given arch; it is required to bisect it.

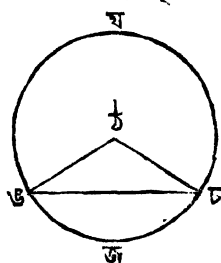
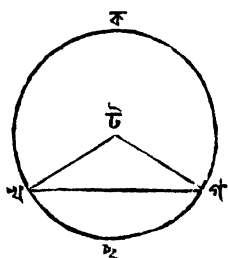
Join AB, and bisect (10. 1.) it in C; from the point C draw CD at right angles to AB, and join AD, DB: the arch ADB is bisected in the point D.

Because AC is equal to CB, and CD common to the

২৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সমান২ বৃত্তেতে সমান২ চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখাও সমান হইবে।

কখগ, ঘঙচ সমান২ বৃত্ত, তাহার মধ্যে খছগ চাপ ঙজচ চাপের সমান। খ গ ও ঙ চ সংযুক্ত কর। খগ সরল রেখা ঙচ সরল রেখার সমান হইবে।

দুই বৃত্তের কেন্দ্র ট ঠ নির্ণয় কর খট, টগ, ও ঙঠ, ঠচ রেখা টান। অপর খছগ চাপ ঙজচ চাপের সমান হওয়াতে (৩। ২৭) খটগ কোণও ঙঠচ কোণের সমান, আর দুই বৃত্ত সমান

হওয়াতে তাহাদের কর্কট রেখাও সমান এজন্য খট ও টগ, ঙঠ ও ঠচ সমান, এবং ইহাদের মধ্যস্থ কোণও সমান, সুতরাং খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান (১। ৪)। অতএব সমান২ বৃত্তেতে, ইত্যাদি।

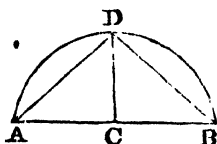
সং উ। খছগ চাপ = ঙজচ চাপ (কল্পনা) ∴ ∠খটগ = ∠ঙঠচ (৩। ২৭) এবং কখগ⊙ = ঘঙচ⊙ (কল্পনা) ∴ খট = ঙঠ, টগ = ঠচ ∴ (১। ৪) খগ = ঙচ।

৩০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট চাপকে দ্বিখণ্ড অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

কঘখ নির্দ্দিষ্ট চাপ, ইহাকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

কখ রেখা টানিয়া গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (১। ১০) এবং গ হইতে গঘ রেখা কখ উপর লম্বভাবে টান এবং ক ঘ

triangles ACD, BCD, the two sides AC, CD are equal to the two BC, CD; but the angle ACD is also equal to the angle BCD, because each of them is a right angle; therefore the base AD is equal (4. 1.) to the base BD. But equal straight lines cut off equal (28. 3) arches, the greater equal to the greater, and the less to the less; and AD, DB are each of them less than a semicircle, because DC passes through the centre (Cor. 1. 3). Wherefore the arch AD is equal to the arch DB: and therefore the given arch ADB is bisected in D. *Which was to be done.*

Sym. Dem. AC = CB by (constr.) DC common to △s ACD, DCB and ∠ACD = ∠DCB (being Rt. ∠s) ∴ (4. 1) AD = DB ∴ arc AD = arc DB (28. 3.) each being less than ½⊙ for DC passes through the centre (cor. 1. 3.)

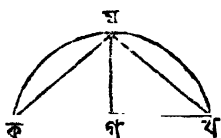
PROP. XXXI. THEOR.

In a circle, the angle in a semicircle is a right angle; but the angle in a segment greater than a semicircle is less than a right angle; and the angle in a segment less than a semicircle is greater than a right angle.

Let ABCD be a circle, of which the diameter is BC, and centre E; draw CA dividing the circle into the segments ABC, ADC, and join BA, AD, DC; the angle in the semicircle BAC is a right angle, and the angle in the segment ABC, which is greater than a semicircle, is less than a right angle: and the angle in the segment ADC, which is less than a semicircle, is greater than a right angle.

Join AE, and produce BA to F; and because BE is equal to EA, the angle EAB is equal (5. 1.) to EBA; also because AE is equal to EC, the angle EAC is equal to ECA: wherefore the whole angle BAC is equal to the two angles ABC, ACB. But FAC, the exterior

ও ঘ খ সংযুক্ত কর। কঘখ চাপ ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইল

কগ গখ সমান, এবং গঘ কঘগ ও গঘখ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, একারণ কগ গঘ ক্রমশ খগ গঘ সমান, এবং কগঘ কোণও খগঘ কোণের সমান কেননা ইহারা প্রত্যেকে সমকোণ, সুতরাং (১। ৪) কঘ ভূমি খঘ ভূমির সমান। অপর সমান২ সরল রেখা সমান২ চাপ ছেদ করিলে, বৃহত্তর বৃহত্তরের, ও লঘুতর লঘুতরের সমান হয় (৩। ২৮), আর কঘ, খঘ প্রত্যেকে অর্দ্ধবৃত্ত হইতে লঘুতর কেননা (৩। ১ অনু) গঘ কেন্দ্র দিয়া যাইবে, অতএব কঘ চাপ খঘ সমান সুতরাং কঘখ চাপ ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড হইয়াছে, ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ.। কগ = গখ (অঙ্ক পাত) ঘগ, কগঘ ও ঘগখ ত্রিভুজের সামান্য বাহু, এবং ∠কগঘ = ∠ঘগখ (কেননা সম কোণ) ∴ (১। ৪) কঘ = ঘখ ∴ কঘ চাপ = ঘখ চাপ (৩। ২৮) কেননা প্রত্যেকে ½⊙ হইতে ন্যূন কারণ ঘগ কেন্দ্র গত (৩। ১, অনু)।

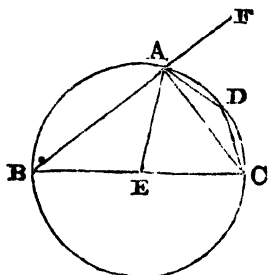
৩১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের মধ্যে অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ, অর্দ্ধবৃত্তের অধিক খণ্ডস্থ কোণ সমকোণের ন্যূন, এবং অর্দ্ধবৃত্তের লঘুতর খণ্ডস্থ কোণ সমকোণের অধিক হইবে।

কখগঘ এক বৃত্ত, খগ তাহার ব্যাস এবং ঙ কেন্দ্র। বৃত্তকে কখগ, কঘগ দুই খণ্ডে বিভক্ত করত কগ রেখা টান এবং ক খ, ও ক ঘ, ও গ ঘ সংযুক্ত কর। খকগ অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ, অর্দ্ধবৃত্তের অধিক কখগ খণ্ডস্থ কোণ লঘুকোণ, এবং অর্দ্ধবৃত্তর লঘুতর কঘগ খণ্ডস্থ কোণ অধিক কোণ।

ক ঙ সংযুক্ত করিয়া কখ চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর। খঙ কঙ সমান হওয়াতে (১। ৫) ঙকখ কোণ ঙখক সমান হইবে, এবং কঙ গঙ সমান হওয়াতে ঙকগ কোণ ঙগক সমান, সুতরাং সমুদয় খকগ কোণ কখগ ও কগখ দুই কোণের যোগ তুল্য।

angle of the triangle ABC, is also equal (32. 1.) to the two angles ABC, ACB; therefore the angle BAC is equal to the angle FAC, and each of them is therefore a right (7. Def. 1.) angle: wherefore the angle BAC in a semicircle is a right angle.

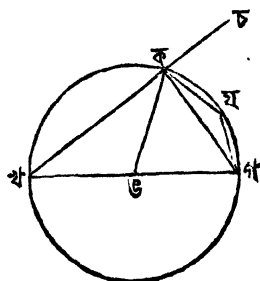
And because the two angles ABC, BAC of the triangle ABC are together less (17. 1.) than two right angles, and BAC is a right angle, ABC must be less than a right angle: and therefore the angle in a segment ABC, greater than a semicircle, is less than a right angle.

Also, because ABCD is a quadrilateral figure in a circle, any two of its opposite angles are equal (22. 3.) to two right angles: therefore the angles ABC, ADC are equal to two right angles; and ABC is less than a right angle; wherefore the other ADC is greater than a right angle. Therefore, "*in a circle*," &c. Q. E. D.

Cor. From this it is manifest, that *if one angle of a triangle be equal to the other two it is a right angle*, because the angle adjacent to it is equal to the same two; and when the adjacent angles are equal, they are right angles.

Sym. Dem. BE = AE ∴ ∠ABE = ∠BAE (5. 1.) Similarly ∠ACE = ∠EAC ∴ ∠ABC + ∠ACB = ∠BAC. But ∠FAC = ∠ABC + ∠ACB (32. 1.) = ∠BAC ∴ ∠BAC is a Rt.∠ (7. Def. 1.)

Next ∠ABC + ∠BAC ∠ 2 Rt. ∠s (17. 1.) and ∠BAC is a Rt. ∠ ∴ ∠ABC ∠ a Rt. ∠. Again, ∠ABC + ∠ADC = 2 Rt. ∠s (22. 3.) and ∠ABC ∠ a Rt. ∠ ∴ ∠ADC 7 a Rt. ∠.

অপর কখগ ত্রিভুজের বহিস্থ চকগ কোণও (১। ৩২) কখগ, কগখ দুই কোণের যোগ তুল্য, অতএব খকগ কোণ চকগ কোণের সমান, সুতরাং (১। ৭ সং) ইহারা প্রত্যেকে সমকোণ, অতএব অর্দ্ধবৃত্তস্থ খকগ কোণ এক সমকোণ।

অপর কখগ ত্রিভুজের কখগ ও খকগ দুই কোণ একত্র দুই সমকোণ হইতে ন্যূন (১। ১৭), এবং খকগ স্বয়ং এক সমকোণ, সুতরাং কখগ কোণ অবশ্য সমকোণ হইতে ন্যূন হইবে, এইরূপে অর্দ্ধবৃত্তের অধিক কখগ খণ্ডস্থ কোণ সমকোণ হইতে ন্যূন হইবে।

পুনশ্চ (৩। ২২) বৃত্তের মধ্যে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র থাকিলে তাহার সম্মুখস্থ দুই কোণ একত্র দুই সমকোণ তুল্য, একারণ কখগ, কঘগ দুই কোণ একত্র দুই সমকোণ তুল্য তাহার মধ্যে কখগ সমকোণ হইতে ন্যূন সুতরাং কঘগ সমকোণ হইতে অধিক হইবে। অতএব বৃত্তের মধ্যে, ইত্যাদি।

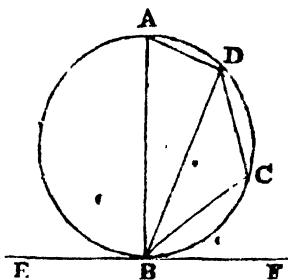
অনুমান। এস্থলে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে ত্রিভুজের এক কোণ যদি অন্য দুই কোণের সমান হয় তবে সে সমকোণ, কেননা তাহার সমীপস্থ কোণও ঐ দুই কোণের তুল্য, আর সমীপস্থ দুই কোণ সমান হইলে প্রত্যেকে সমকোণ হয়।

সং উ.। খও = কও ∴ ∠কখও = ∠খকও (১। ৫) তদ্রূপ ∠কগও = ∠ওকগ ∴ ∠কখগ + ∠কগখ = ∠খকগ। অপর ∠চকগ = ∠কখগ + ∠কগখ (১। ৩২) = ∠খকগ ∴ ∠খকগ সমকোণ (১। ৭ সং)।

পুনশ্চ, ∠কখগ + ∠খকগ ∠ ২সমকোণ (১। ১৭) এবং ∠খকগ এক সমকোণ ∴ ∠কখগ ∠ সমকোণ। অপিচ, ∠কখগ + ∠কঘগ = ২সম ∠ (৩। ২২) এবং ∠কখগ ∠ সমকোণ ∴ ∠কঘগ 7 সমকোণ।

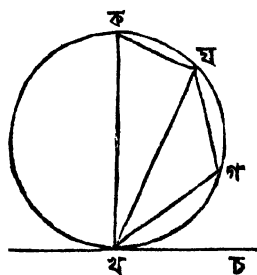
PROP. XXXII. THEOR.

If a straight line touch a circle, and from the point of contact a straight line be drawn cutting the circle, the angles made by this line with the line which touches the circle, are equal to the angles in the alternate segments of the circle.

Let the straight line EF touch the circle ABCD in B, and from the point B let the straight line BD be drawn cutting the circle: The angles which BD makes with the touching line EF are equal to the angles in the alternate segments of the circle: that is, the angle FBD is equal to the angle which is in the segment DAB, and the angle DBE to the angle in the segment BCD. From the point B draw (11. 1.) BA at right angles to EF, and take any point C in the arch BD, and join AD, DC, CB: and because the straight line EF touches the circle ABCD in the point B, and BA is drawn at right angles to it, from the point of contact B, the centre of the circle is (19. 3.) in BA; therefore the angle ADB, in a semicircle, is a right (31. 3.) angle, and consequently the other two angles BAD, ABD are equal (32. 1.) to a right angle: but ABF is likewise a right angle: therefore the angle ABF is equal to the angles BAD, ABD: take from these equals the common angle ABD; and there will remain the angle DBF equal to the angle BAD, which is in the alternate segment of the circle. And because ABCD is a quadrilateral figure in a circle, the opposite angles BAD, BCD are equal (22. 3.) to two right angles; therefore the angles DBF, DBE, being likewise equal (13. 1.) to two right angles, are equal to the angles BAD, BCD; and DBF has been proved equal to

৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সরল রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিলে যদি স্পর্শচিহ্ন হইতে বৃত্তকে ছেদ করিয়া সরল রেখা টানা যায় তবে সেই রেখা ও স্পর্শক রেখাতে উৎপন্ন কোণ অপর পার্শ্বের খণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে।

ঙচ সরল রেখা কখগঘ বৃত্তকে খ বিন্দুতে স্পর্শ করুক এবং খ বিন্দু হইতে খঘ রেখা বৃত্তকে ছেদ করিয়া টানা যাউক, তাহাতে খঘ ও স্পর্শক ঙচ রেখার সম্পাতে যে২ কোণ উৎপন্ন হইবে তাহারা অপর২ পার্শ্বের খণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে, অর্থাৎ চখঘ কোণ ঘকখ খণ্ডস্থ কোণের সমান এবং ঘখঙ কোণ, খগঘ খণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে।

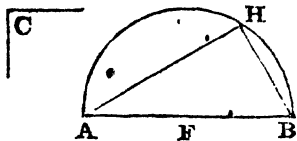
খ বিন্দুতে খক, ঙচ উপর লম্বভাবে টান (১। ১১) এবং খঘ চাপের মধ্যে কোন বিন্দু যথা গ লও এবং কঘ, গঘ, খগ রেখা টান। ঙচ সরল রেখা খ বিন্দুতে কখগঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং খক তাহার উপর স্পর্শ চিহ্ন খ হইতে লম্বভাবে অঙ্কিত হইয়াছে একারণ (৩। ১৯) বৃত্তের কেন্দ্র কখ রেখাতে আছে, অতএব অর্দ্ধবৃত্তস্থ কঘখ কোণ এক সমকোণ (৩। ৩১), সুতরাং খকঘ ও কখঘ অন্য দুই কোণ একত্র এক সমকোণ (১। ৩২)। অপর কখচ এক সমকোণ একারণ কখচ কোণ খকঘ ও কখঘ দুই কোণের যোগ তুল্য, অতএব সামান্য কখঘ কোণ বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট ঘখচ কোণ খকঘ সমান হইবে, ইহাই অপর পার্শ্বের খণ্ডস্থ কোণ। অপর কখগঘ বৃত্তের মধ্যে এক চতুর্ভুজ ক্ষেত্র হওয়াতে খকঘ, খগঘ দুই সন্মুখস্থ কোণ একত্র দুই সমকোণ তুল্য (৩। ২২), আর ঘখঙ ও ঘখচ (১। ১৩) দুই সমকোণ তুল্য হইয়া খকঘ ও খগঘ দুই কোণের যোগ সমান হইবে তাহার মধ্যে ঘখচ

BAD: therefore the remaining angle DBE is equal to the angle BCD, in the alternate segment of the circle. Wherefore, "*if a straight line*," &c. Q. E. D.

Sym. Dem. BA ⊥ EF (by constr.) ∴ the centre is in AB (19. 3.) ∴ ∠ADB is a Rt. ∠ (31. 3.) ∴ ∠BAD + ∠ABD = a Rt. ∠ (32. 1.) = ABF ∴ ∠BAD = ∠DBF. Again, ∠BAD + ∠BCD = 2Rt. ∠s (22. 3) = ∠DBF + ∠DBE (13. 1.) ∴ ∠BCD = ∠DBE.

PROP. XXXIII. PROB.

Upon a given straight line to describe a segment of a circle, containing an angle equal to a given rectilineal angle.

Let AB be the given straight line, and the angle at C the given rectilineal angle; it is required to describe upon the given straight line AB a segment of a circle, containing an angle equal to the angle C.

First, Let the angle at C be a right angle; bisect (10. 1.) AB in F, and from the centre F, at the distance FB, describe the semicircle AHB; the angle AHB being in a semicircle is (31. 3,) equal to the right angle at C. *But*, If the angle C be not a right angle, at the point A, in the straight line* AB, make (23. 1.) the angle BAD equal to the angle C, and from the point A draw (11. 1.) AE at right angles to AD; bisect AB (10. 1.) in F, and from F. draw (11. 1.) FG at right angles to AB and join GB: Then because AF is equal to FB, and FG common to the triangles AFG, BFG, the two sides AF, FG are equal to the two BF, FG; but the angle AFG is also equal to the angle BFG; therefore the base

* Look at the Fig. in the next page.

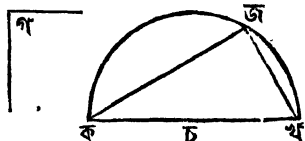
খকঘ সমান উপপন্ন হইয়াছে সুতরাং অবশিষ্ট ঘখঙ তাহার অপর পার্শ্বের খণ্ডস্থ খগঘ কোণ সমান হইবে। অতএব কোন সরল রেখা, ইত্যাদি।

সং উ.। খক ⊥ ঙচ (অঙ্ক পাত) ∴ কখ মধ্যে কেন্দ্র হইবে (৩। ১৯) ∴ ∠কঘখ এক সমকোণ (৩। ৩১) ∴ ∠খকঘ + ∠কখঘ = সম ∠ (১। ৩২) = কখচ ∴ ∠খকঘ = ∠ঘখচ। পুনশ্চ, ∠খকঘ + ∠খগঘ = ২সমকোণ (৩। ২২) = ∠ঘখচ + ∠ঘখঙ (১। ১৩) ∴ ∠খগঘ = ∠ঘখঙ।

৩৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

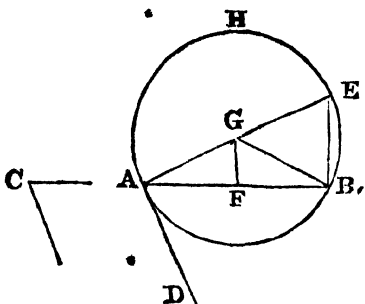
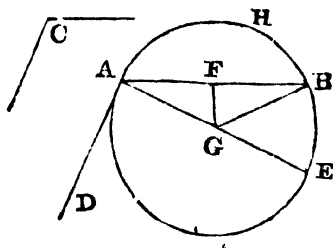
এক নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর এক নির্দ্দিষ্ট সরলরৈখিক কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখা এবং গ নির্দ্দিষ্ট সরলরৈখিক কোণ। কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর গ কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত করিতে হইবেক।

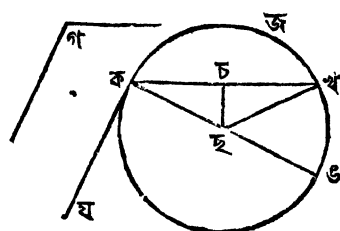
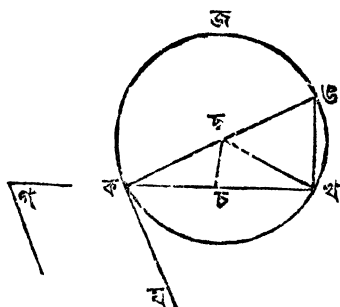
প্রথমতঃ, গ কোণ যেন সমকোণ কল্পনা কর। কখ চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর (১। ১০), এবং চ কেন্দ্র হইতে চখ দূরে কজখ অর্দ্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর।

কজখ অর্দ্ধবৃত্তস্থ হওয়াতে গ সমকোণ তুল্য হইতেছে (৩। ৩১)। দ্বিতীয়তঃ গ যদি সমকোণ না হয় তবে * কখ রেখায় ক বিন্দুতে ঘকখ কোণ গ সমান অঙ্কিত কর (১। ২৩) এবং ক বিন্দু হইতে কঙ, কঘ উপর লম্বভাবে টান (১। ১১), কখ রেখা চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর, (১। ১০), এবং চ হইতে চছ কখ উপর লম্বভাবে টানিয়া ছ খ সংযুক্ত কর। কচ চখ সমান, ও চছ কচছ, খচছ ত্রিভুজের সামান্য বাহু সুতরাং কচ, চছ দুই বাহু ক্রমশ খচ, চছ তুল্য, এবং কচছ কোণও খচছ সমান,

---

* পর পৃষ্ঠার ক্ষেত্রে দৃষ্টি কর।

AG is equal (4. 1.) to the base GB; and the circle described from the centre G, at the distance GA, will pass through the point B; let this be the circle AHB: And because from the point A, the extremity of the diameter AE, AD is drawn at right angles to AE, therefore AD (Cor. 16. 3.) touches the circle: and because AB, drawn from the point of contact A. cuts the circle, the angle DAB is equal to the angle in the alternate segment AHB (32. 3.); but the angle DAB is equal to the angle C, therefore also the angle C is equal to the angle in the segment AHB: Wherefore, upon the given straight line AB, a segment, AHB, of a circle is described which contains an angle equal to the given angle at C. *Which was to be done.*

Sym. Dem. First. ∠C is a Rt. ∠ (Hyp.) ∠AHB is a Rt. ∠ (31. 3.) ∴ ∠AHB = ∠C.

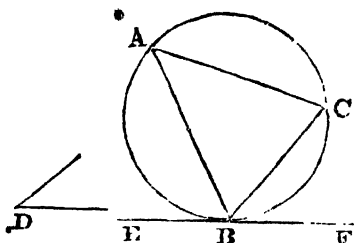
Secondly. ∠C ≠ a Rt. ∠ (Hyp.) AF = FB (by constr.) GF common to △s AFG, GFB and ∠AFG = ∠BFG (by constr.) ∴ AG = GB (4. 1.), ∴ a ⊙ described from centre G at the distance GA will pass through B, and AD will touch it (cor. 16. 3.) ∴ ∠BAD = ∠ in seg. AHB (32. 3.) But ∠BAD = ∠C ∴ ∠C = ∠ in seg. AHB.

একারণ (১। ৪) কছ ভূমি খছ ভূমির সমান, সুতরাং ছ কেন্দ্র হইতে ছক দূরে বৃত্ত আঁকিলে খ বিন্দু দিয়া যাইবে। সে বৃত্ত যেন কজখ হউক। অপর কঙ ব্যাসের ক প্রান্ত হইতে কঘ কঙ উপর লম্ব অঙ্কিত হওয়াতে কঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে (৩। ১৬ অনু), আর স্পর্শ চিহ্ন ক হইতে কখ অঙ্কিত হইয়া বৃত্তকে ছেদ করিতেছে এজন্য ঘকখ কোণ অপর পার্শ্বের কজখ খণ্ডস্থ কোণের সমান হইতেছে (৩। ৩২), এবং ঘকখ কোণ গ কোণ সমান হওয়াতে কজখ খণ্ডস্থ কোণও গ কোণ সমান হইতেছে। অতএব কখ নির্দ্দিষ্ট সরল রেখার উপর গ কোণ সমান কোণ বিশিষ্ট কজখ এক বৃত্তখণ্ড অঙ্কিত হইয়াছে, ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ.। প্রথমতঃ, ∠গ সমকোণ (কল্পনা) ∠কজখ এক সম ∠ (৩। ৩১) ∴ ∠কজখ = ∠গ। দ্বিতীয়তঃ, ∠ গ ≠ সমকোণ (কল্পনা) কচ = চখ (অঙ্কপাত) ছচ, কচছ, ছচখ ত্রিভূজের সামান্য বাহু এবং ∠কচছ = ∠খচছ (অঙ্কপাত) ∴ কছ = ছখ (১। ৪), ∴ ছ কেন্দ্র হইতে ছক দূরে ⊙অঙ্কিত হইলে খ দিয়া যাইবে এবং কঘ তাহাকে স্পর্শ করিবে (৩। ১৬ অনু) ∴ ∠খকঘ = কজখ খণ্ডস্থ কোণ (৩। ৩২) কিন্তু ∠খকঘ = ∠গ ∴ ∠গ = কজখ খণ্ডস্থ কোণ।

PROP. XXXIV. PROB.

To cut off a segment from a given circle which shall contain an angle equal to a given rectilineal angle.

Let ABC be the given circle, and D the given rectilineal angle; it is required to cut off a segment from the circle ABC which shall contain an angle equal to the angle D.

Draw (17. 3.) the straight line EF touching the circle ABC in the point B, and at the point B, in the straight line BF, make (23. 1.) the angle FBC equal to the angle D; therefore, because the straight line EF touches the circle ABC, and BC is drawn from the point of contact B, the angle FBC is equal (32. 3.) to the angle in the alternate segment BAC: but the angle FBC is equal to the angle D: therefore the angle in the segment BAC is equal to the angle D: wherefore the segment BAC is cut off from the given circle ABC, containing an angle equal to the given angle D. *Which was to be done.*

Sym. Dem. $\angle$FBC = $\angle$ in seg. BAC (32. 3.) $\angle$FBC = $\angle$D (by constr.) $\therefore$ $\angle$D = $\angle$ in seg. BAC.

PROP. XXXV. THEOR.

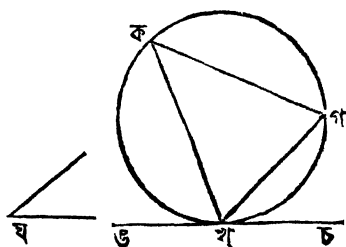
If two straight lines within a circle cut one another, the rectangle contained by the segments of one of them is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

Let the two straight lines AC, BD, within the cir-

৩৪. প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এক নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত হইতে নির্দ্দিষ্ট সরলরৈখিক কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট খণ্ড ছেদ করিতে হইবে।

কখগ নির্দ্দিষ্ট বৃত্ত এবং ঘ নির্দ্দিষ্ট সরলরৈখিক কোণ। কখগ বৃত্ত হইতে ঘ কোণ সমান কোণ বিশিষ্ট এক খণ্ড ছেদ করিতে হইবেক।

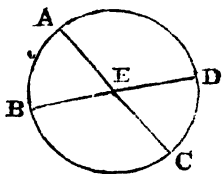
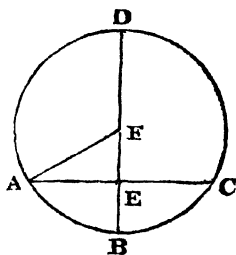
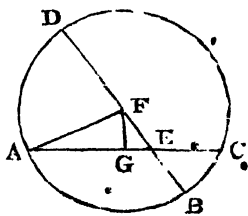
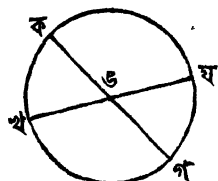
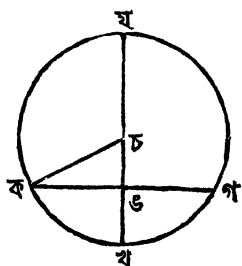
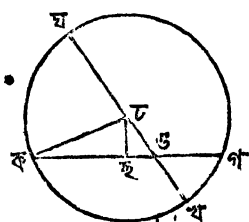
কখগ বৃত্তকে খ বিন্দুতে স্পর্শ কারক ঙচ সরল রেখা টান (৩। ১৭), এবং ঙচ সরল রেখার খ বিন্দুতে চখগ ঘ কোণ সমান অঙ্কিত কর (১। ২৩)। অপর ঙচ সরল রেখা খকগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং স্পর্শচিহ্ন খ হইতে, খগ টানা গিয়াছে একারণ চখগ কোণ অপর পার্শ্বের খণ্ডস্থ খকগ কোণের সমান (৩। ৩২), কিন্তু চখগ কোণ ঘ কোণ সমান, সুতরাং খকগ খণ্ডস্থ কোণ ঘ কোণের সমান, অতএব নির্দ্দিষ্ট কখগ বৃত্ত হইতে নির্দ্দিষ্ট ঘ কোণ সমান কোণ বিশিষ্ট খকগ খণ্ড ছিন্ন হইয়াছে, ইহাই এস্থলে সম্পাদ্য।

সং উ.। ∠চখগ = খকগ খণ্ডস্থ কোণ (৩। ৩২) ∠চখগ = ∠ঘ (অঙ্কপাত) ∴ ∠ঘ = খকগ খণ্ডস্থ কোণ।

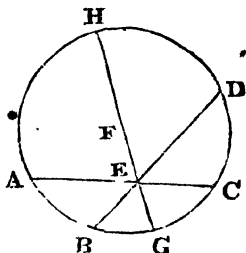
৩৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্ত মধ্যস্থ দুই সরল রেখা পরস্পর ছিন্ন করিলে একটীর দুই খণ্ডের আয়ত অন্যটীর দুই খণ্ডের আয়ত তুল্য হইবে।

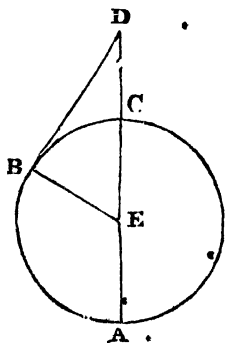
কখগঘ বৃত্তের মধ্যে কগ, খঘ, দুই সরলরেখা ঙ বিন্দুতে পরস্পরকে ছিন্ন করুক, কঙ, ঙগ অন্তর্গত আয়ত খঙ, ঙঘ অন্তর্গত আয়তের সমান।

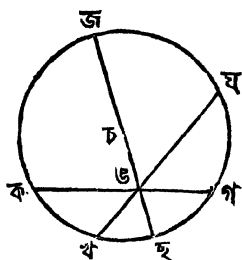
cle ABCD, cut one another in the point E: the rectangle contained by AE, EC is equal to the rectangle contained by BE, ED.

If AC, BD pass each of them through the centre, so that E is the centre, it is evident, that AE, EC, BE, ED, being all equal, the rectangle AE.EC is equal to the rectangle BE.ED.

But, Let one of them BD pass through the centre, and cut the other AC, which does not pass through the centre, at right angles in the point E: then, if BD be bisected in F, F is the centre of the circle ABCD; join AF: and because BD, which passes through the centre, cuts the straight line AC, which does not pass through the centre, at right angles in E, AE, EC are equal (3. 3.) to one another; and because the straight line BD is cut into two equal parts, in the point F, and into two unequal, in the point E, BE.ED $+$ EF^2 $=$ (5. 2.) FB^2 $=$ AF^2. But AF^2 $=$ (47. 1.) AE^2 $+$ EF^2, therefore BE.ED $+$ EF^2 $=$ AE^2 $+$ EF^2, and taking EF^2 from each, BE.ED $=$ AE^2 $=$ AE.EC.

Next, Let BD, which passes through the centre, cut the other AC, which does not pass through the centre, in E, but not at right angles: then, as before, if BD be bisected in F, F is the centre of the circle. Join AF, and from F draw (12. 1.) FG perpendicular to AC: therefore AG is equal (3. 3.) to GC; wherefore AE.EC $+$ (5. 2.) EG^2 $=$ AG^2, and adding GF^2 to both, AE.EC $+$ EG^2

যদি কগ, খঘ প্রত্যেকে কেন্দ্র দিয়া যায় অর্থাৎ ঙ যদি কেন্দ্র হয় তবে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে যে কঙ, ঙগ, খঙ, ঙঘ সকলি সমান হওয়াতে কঙ, ঙগ আয়ত খঙ, ঙঘ আয়তের সমান হইবে।

অনন্তর ইহাদের একটী অর্থাৎ খঘ কেন্দ্রগত হইয়া অন্যটী অর্থাৎ কগ কেন্দ্রগত না হইলে তাহাকে ঙ বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করুক, তাহাতে খঘ চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইলে চ কখগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। পরে ক চ সংযুক্ত কর এবং খঘ কেন্দ্রগত হইয়া কগ রেখা কেন্দ্রগত না হইলে তাহাকে ঙ বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করাতে কঙ, ঙগ পবস্পর সমান হইতেছে (৩। ৩), এবং খঘ সরল রেখা চ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ও ঙ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হওয়াতে (২। ৫) খঙ.ঙঘ $+$ ঙচ^২ $=$ চখ^২ $=$ কচ^২। কিন্তু কচ^২ $=$ কঙ^২ $+$ ঙচ^২ (১। ৪৭), অতএব খঙ.ঙঘ $+$ ঙচ^২ $=$ কঙ^২ $+$ ঙচ^২, এবং প্রত্যেক হইতে ঙচ^২ বিয়োগ করিলে খঙ.ঙঘ $=$ কঙ^২ $=$ কঙ.ঙগ।

পুনশ্চ, খঘ কেন্দ্রগত হইয়া কগ কেন্দ্রগত না হইলে তাহাকে ঙ বিন্দুতে লম্বভাব ব্যতিরেকে ছিন্ন করুক, তাহাতে পূর্ব্ববৎ খঘ চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইলে চ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। ক চ সংযুক্ত কর, কগ উপর চ হইতে চছ লম্বপাত কর (১। ১১), অতএব কছ ছগ সমান (৩। ৩), একারণ কঙ.ঙগ

+ $GF^2 = AG^2 + GF^2$. Now, $EG^2 + GF^2 = EF^2$, and $AG^2 + GF^2 = AF^2$; therefore $AE.EC + EF^2 = AF^2 = FB^2$. But $FB^2 = BE.ED +$ (5. 2.) EF^2, therefore $AE.EC + EF^2 = BE.ED + EF^2$, and taking EF^2 from both, AE.EC = BE.ED.

Lastly, Let neither of the straight lines AC, BD pass through the centre: take the centre F, and through E, the intersection of the straight lines AC, DB, draw the diameter GEFH: and because, as has been shown, AE.EC=GE.EH, and BE.ED = GE.EH; therefore AE.EC=BE.ED. Wherefore, "*if two straight lines,*" &c. Q. E. D.

PROP. XXXVI. THEOR.

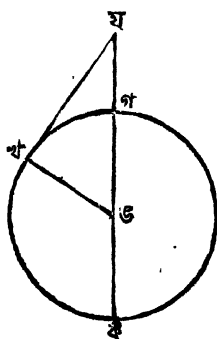
If from any point without a circle two straight lines be drawn, one of which cuts the circle, and the other touches it; the rectangle contained by the whole line which cuts the circle, and the part of it without the circle, is equal to the square of the line which touches it.

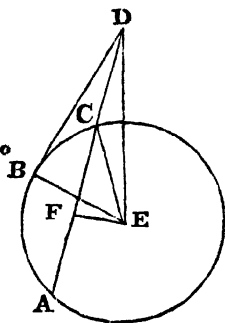
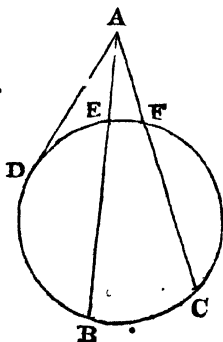
Let D be any point without the circle ABC, and DCA, DB two straight lines drawn from it, of which DCA cuts the circle, and DB touches it: the rectangle AD.DC is equal to the square of DB. Either DCA passes through the centre, or it does not; *first*, Let it pass through the centre E, and join EB; therefore the angle EBD is a right (18. 3.) angle: and because the straight line AC is bisected in E, and produced to the point D, AD.DC + EC^2= (6. 2.) ED^2. But EC

+ ঙছ^{২} = কছ^{২} (২।৫), এবং উভয়ে চছ^{২} যোগ করিলে কঙ.ঙগ + ঙছ^{২} + চছ^{২} = কছ^{২} + চছ^{২}। অপর ঙছ^{২} + চছ^{২} = ঙচ^{২} এবং কছ^{২} + চছ^{২} = কচ^{২} অতএব কঙ.ঙগ + ঙচ^{২} = কচ^{২} = চখ^{২}। কিন্তু চখ^{২} = খঙ.ঙঘ + ঙচ^{২} (২।৫) সুতরাং কঙ.ঙগ + ঙচ^{২} = খঙ.ঙঘ + ঙচ^{২} এবং উভয়তঃ ঙচ^{২} বিয়োগ করিলে কঙ.ঙগ = খঙ.ঙঘ।

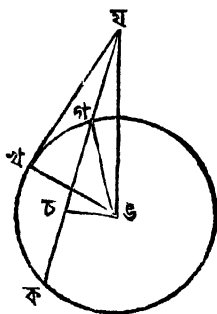
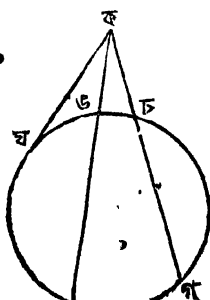
অবশেষে, কগ, খঘ দুই সরল রেখার মধ্যে কোনটী যেন কেন্দ্র দিয়া না যায়। চ কেন্দ্র নির্ণয় কর এবং কগ, খঘ দুই রেখার ছেদ চিহ্ন ঙ হইতে ছঙচজ ব্যাস টান, তাহাতে পূর্ব্বোক্ত উপপত্ত্যনুসারে কঙ.ঙগ = ছঙ.ঙজ এবং খঙ.ঙঘ = ছঙ.ঙজ একারণ কঙ.ঙগ = খঙ.ঙঘ। অতএব বৃত্ত মধ্যস্থ ইত্যাদি।

৩৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে দুই সরলরেখা টানিলে যদি তাহাদের একটী বৃত্তকে ছিন্ন করে অন্যটী স্পর্শ করে, তবে যে রেখা বৃত্তকে ছিন্ন করে তাহার সমুদয় এবং বহিস্থ অংশের আয়ত স্পর্শক রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হইবে।

কখগ বৃত্তের বহিস্থ এক চিহ্ন ঘ, তথা হইতে অঙ্কিত ঘগক, ও ঘখ দুই সরলরেখা তাহার মধ্যে ঘগক বৃত্তকে ছেদ করিতেছে এবং ঘখ স্পর্শ করিতেছে। কঘ.ঘগ আয়ত ঘখ সমচতুর্ভুজ তুল্য।

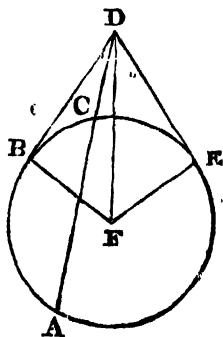
ঘগক কেন্দ্রগত হইতে পারে না, হইতেও পারে প্রথমতঃ যেন ঙ কেন্দ্র দিয়া যায় তাহাতে ঙ খ সংযুক্ত কর, সুতরাং ঙখঘ এক সমকোণ (৩।১৮) এবং কগ সরলরেখা

= EB, therefore AD.DC + EB^2 = ED^2. Now ED^2 = (47. 1.) EB^2 + BD^2, because EBD is a right angle; therefore AD.DC + EB^2 = EB^2 + BD^2, and taking EB^2, from each AD.DC = BD^2.

But, if DCA do not pass through the centre of the circle ABC take (1. 3.) the centre E, and draw EF perpendicular (12. 1.) to AC, and join EB, EC, ED; and because the straight line EF, which passes through the centre, cuts the straight line AC which does not pass through the centre at right angles, it likewise bisects (3. 3.) it; therefore AF is equal to FC; and because the straight line AC is bisected in F, and produced to D (6. 2.), AD.DC + FC^2 = FD^2; add FE^2 to both, then AD.DC + FC^2 + FE^2 = FD^2 + FE^2. But (47. 1.) EC^2 = FC^2 + FE^2, and ED^2 = FD^2 + FE^2, because DFE is a right angle; therefore AD.DC + EC^2 = ED^2.+ Now, because EBD is a right angle, ED^2 = EB^2 + BD^2 = EC^2 + BD^2, and therefore AD.DC + EC^2 = EC^2 + BD^2, and AD.DC = BD^2. Wherefore, "*if from any point*," &c. Q. E. D.

Cor. *If from any point without a circle, there be drawn two straight lines cutting it, as* AEB, AFC, *the rectangles contained by the whole lines and the parts of them without the circle, are equal to one another*, viz. BA.AE = CA.AF; for each of these rectangles is equal to the square of the straight line AD, which touches the circle.

ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইয়াছে একারণ (২।৬) কঘ.ঘগ + ঙগ² = ঙঘ²। কিন্তু ঙগ = ঙখ সুতরাং কঘ.ঘগ + ঙখ² = ঙঘ²। অপর (১। ৪৭) ঙঘ² = ঙখ² + খঘ² কেননা ঙখঘ সমকোণ সুতরাং কঘ.ঘগ + ঙখ² = ঙখ² + খঘ² এবং উভয়তঃ ঙখ² বিয়োগ করিলে কঘ.ঘগ = খঘ²।

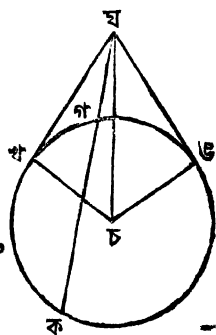
দ্বিতীয়তঃ, ঘগক যদি কখগ বৃত্তের কেন্দ্রগত না হয় তবে (৩। ১) ঙ কেন্দ্র নির্ণয় কর এবং কগ উপর ঙচ লম্বপাত কর এবং ঙ খ, ঙ গ, ঙ ঘ সংযুক্ত কর। ঙচ সরলরেখা কেন্দ্রগত হইয়া কগ কেন্দ্রগত না হইলে তাহাকে লম্বভাবে ছেদ করাতে দ্বিখণ্ডও করিতেছে (৩। ৩), সুতরাং কচ চগ সমান, পরে কগ সরলরেখা চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ঘ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি পাইয়াছে (২। ৬) একারণ কঘ.ঘগ + চগ² = চঘ² উভয়ে ঙচ² যোগ করিলে কঘ.ঘগ + চগ² + ঙচ² = চঘ² + ঙচ²। কিন্তু (১। ৪৭) ঙগ² = চগ² + ঙচ² এবং ঙঘ² = চঘ² + ঙচ² কেননা ঙচঘ সমকোণ, সুতরাং কঘ.ঘগ + ঙগ² = ঙঘ²। অপর ঙখঘ সমকোণ হওয়াতে ঙঘ² = ঙখ² + খঘ² = ঙগ² + খঘ² সুতরাং কঘ.ঘগ + ঙগ² = ঙগ² + খঘ² এবং কঘ.ঘগ = খঘ²। অতএব বৃত্তের বহিস্থ, ইত্যাদি।

অনু.। বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে দুই সরলরেখা যথা কঙখ কচগ যদি তাহাকে ছেদ করিয়া অঙ্কিত হয় তবে ঐ২ সমুদয় রেখা এবং তাহাদের বৃত্তবহিস্থ অংশের অন্তর্গত আয়ত পরস্পর সমান অর্থাৎ খক.কঙ = গক.কচ কেননা এই প্রত্যেক আয়ত কঘ স্পর্শরেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য।

PROP. XXXVII. THEOR.

If from a point without a circle there be drawn two straight lines, one of which cuts the circle, and the other meets it; if the rectangle contained by the whole line, which cuts the circle, and the part of it without the circle, be equal to the square of the line which meets it, the line which meets also touches the circle.

Let any point D be taken without the circle ABC, and from it let two straight lines DCA and DB be drawn, of which DCA cuts the circle, and DB meets it; if the rectangle AD.DC be equal to the square of DB, DB touches the circle.

Draw (17. 3.) the straight line DE touching the circle ABC; find the centre F, and join FE, FB, FD; then FED is a right (18. 3.) angle; and because DE touches the circle ABC, and DCA cuts it, the rectangle AD.DC is equal (36. 3.) to the square of DE; but the rectangle AD.DC is, by hypothesis, equal to the square of DB, therefore the square of DE is equal to the square of DB, and the straight line DE equal to the straight line DB; but FE is equal to FB, wherefore DE, EF are equal to DB, BF; and the base FD is common to the two triangles DEF, DBF; therefore the angle DEF is equal (8. 1.) to the angle DBF; and DEF is a right angle, therefore also DBF is a right angle: but FB, if produced, is a diameter, and the straight line which is drawn at right angles to a diameter, from the extremity of it, touches (16. 3.) the circle: therefore DB touches the circle ABC. Wherefore, "*if from a point*," &c. Q. E. D.

৩৭° প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে দুই সরলরেখা একটী বৃত্তকে ছিন্ন করিয়া অন্যটী বৃত্তেতে সংলগ্ন হইয়া অঙ্কিত হইলে যে রেখা বৃত্তকে ছিন্ন করে তাহার সমুদয় ও বহিস্থ অংশের আয়ত যদি সংলগ্ন রেখার সমচতুর্ভুজ তুল্য হয় তবে সেই সংলগ্ন রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

কখগ বৃত্তের বাহিরে ঘ এক বিন্দুর নির্দ্দেশ কর এবং তথা হইতে ঘগক ও ঘখ দুই সরলরেখা টান তাহার মধ্যে ঘগক যেন বৃত্তকে ছেদ করে ও ঘখ বৃত্তেতে সংলগ্ন হয়। যদি কঘ.ঘগ আয়ত ঘখ সমচতুর্ভুজের সমান হয় তবে ঘখ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। কখগ বৃত্তের স্পর্শক ঘঙ রেখা টান, এবং চ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া চ ঙ, চ খ, চ ঘ সংযুক্ত কর, তাহাতে চঙঘ সমকোণ হইবে (৩। ১৮)। এবং ঘঙ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে ও ঘগক ছেদ করিতেছে একারণ কঘ.ঘগ আয়ত ঘঙ সমচতুর্ভুজ তুল্য (৩। ৩৬), কিন্তু কঘ.ঘগ আয়ত কল্পনানুসারে ঘখ সমচতুর্ভুজ তুল্য সুতরাং ঘঙ সমচতুর্ভুজ ঘখ সমচতুর্ভুজ সমান, এবং তন্নিমিত্তে ঘঙ সরলরেখা ঘখ রেখার সমান, আর চঙ চখ সমান অতএব ঘঙ, ঙচ ক্রমশ ঘখ, খচ সহিত সমান, এবং ঘচ, ঘঙচ ও ঘখচ উভয় ত্রিভুজের সামান্য ভূমি একারণ (১। ৮) ঘঙচ কোণ ঘখচ কোণের সমান, আর ঘঙচ সমকোণ হওয়াতে ঘখচও সমকোণ। অপর খচ বৃদ্ধি পাইলে ব্যাস হইবে, এবং ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে সে লম্ব বৃত্তকে স্পর্শ করে (৩। ১৬) সুতরাং ঘখ কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে, অতএব বৃত্তের বহিস্থ, ইত্যাদি।

Sym. Dem. AD.DC = BD^2 (Hyp.) AD.DC = DE^2 (36. 3.) ∴ $BD^2 = DE^2$ ∴ BD = DE. BF = =EF (11. Def. 1.) FD common to △s BFD, EFD ∴ (8. 1.) ∠DEF = ∠DBF. But ∠DEF is a Rt. ∠ (18. 3.) ∴ DBF is a Rt. ∠ ∴ DB touches the ⊙ (16. 3.)

END OF NO. II.

ERRATA.

page	line	for	read
36	29	∠BDC	∠BCD
37	11	DEF	EDF
52	16	DE	DF
54	33	DE	DF
[illegible]	22	BE	BF
90	28	2CB.BD²	2CB BD
107	30	∠EFA	∠FEA

সং উ.। কঘ.ঘগ = খঘ^{২} (কল্পনা) কঘ.ঘগ = ঘঙ^{২} (৩। ৩৬) ∴ খঘ^{২} = ঘঙ^{২} ∴ খঘ = ঘঙ। খচ = ঙচ (১। ১১ সং) চঘ, খচঘ, ঙচঘ ত্রিভুজের সামান্য বাহু ∴ (১। ৮) ∠ঘঙচ = ∠ঘখচ কিন্তু ∠ঘঙচ এক সমকোণ (৩। ১৮) ∴ ঘখচ এক সমকোণ ∴ ঘখ ⊙স্পর্শ করে (৩। ১৬)।

সমাপ্তোয়ং কাণ্ডঃ।

পৃষ্ঠা	পংক্তি	অশুদ্ধ	শুদ্ধ
৪৬	১৩, ১৪	কখগখ	কখগ
৬৪	২৯	কগঘ	কগখ
৫৬	১৭	ঘচ	ঘঙ
৮৭	২০	কডছ	গড়ছ
১৪৩	২৭,২৮	পারে না,	পারে, না

No. III. (Miscellaneous Readings) will be published in June.